בונוס. יהי X מרחב טופולוגי, ויהיו $A, B \subseteq X$. נניח כי A, B תתי מרחבים קשירים, וכן $cl(A) \cap B \neq \emptyset$. הוכח ש־$A \cup B$ קשיר.

הוכחה. נתון כי $cl(A) \cap B \neq \emptyset$. נוכיח כי $A \cup (cl(A) \cap B)$ גם הוא קשיר. נוכיח כי A צפופה במרחב זה.

תהי U פתוחה ב־$A \cup (cl(A) \cap B)$. נשים לב כי מתקיים $A \cup (cl(A) \cap B) \subseteq cl(A)$. לכן, קיימת V פתוחה ב־$cl(A)$ כך ש־

$$U = V \cap (A \cup (cl(A) \cap B))$$

כעת, נוכיח כי $U \cap A \neq \emptyset$. V פתוחה ב־$cl(A)$, ומתקיים כי A צפופה ב־$cl(A)$[1], ולכן $V \cap A \neq \emptyset$. מתקיים

$$U \cap A = V \cap (A \cup (cl(A) \cap B)) \cap A = (V \cap A) \cap (A \cup (cl(A) \cap B))$$

כעת, בהכרח קיים $a \in (V \cap A)$ כלשהו כי $V \cap A \neq \emptyset$, ו־$a \in A$, ולכן גם $a \in (A \cup (cl(A) \cap B))$. ולכן סה"כ $U \cap A$ אינה **ריקה**.

ולכן הוכחנו כי A צפופה ב־$A \cup (cl(A) \cap B)$. כעת, A צפופה ב־$A \cup (cl(A) \cap B)$ ו־A תת מרחב קשיר של $A \cup (cl(A) \cap B)$. ולכן ממשפט מן ההרצאה, נקבל כי $A \cup (cl(A) \cap B)$ **קשיר** גם הוא.

כעת, מתקיים $(A \cup (cl(A) \cap B)) \cap B \neq \emptyset$. זה כי קיים $b \in cl(A) \cap B$[2], ו־$b \in B$ וגם $b \in A \cup (cl(A) \cap B)$.

כמו כן, מתקיים כי $(A \cup (cl(A) \cap B)) \cup B = A \cup B$. זה מתקיים ברכיב הראשון הוספנו ל־A את האיברים ב־B שנמצאים ב־$cl(A)$, ואז ברכיב השני הוספנו את כל שאר האיברים ב־B. כעת, $A \cup (cl(A) \cap B)$ קשיר ו־B קשיר, וחיתוכם **אינו** ריק, ולכן לפי משפט מן ההרצאה איחוד המרחבים גם הוא קשיר. איחוד המרחבים הוא $A \cup B$ ולכן $A \cup B$ קשיר.

[1] טענה טריוויאלית שהוכחה בהרצאה.
[2] כי $cl(A) \cap B \neq \emptyset$.