

קומבי תרגול 13

18 בינואר 2021

תרגילים:

1. יהי G עץ בינארי מושרש המלא בגובה H (לכל קודקוד שאינו עלה יש 2 בנים, ועלים הם רק בגובה H). הוכיחו:

(א) יש 2^H עלים.

(ב) מצאו את מספר הצלעות.

פתרון: א. באינדוקציה על H . תעשו בסיס. נניח נכונות עבור $H - 1$ ונוכיח עבור H . אז יש לנו עץ מלא בגובה H , העלים בו הם הבנים של העלים של עץ מלא בגובה $H - 1$ (כמו להשמיט את כל העלים שלנו), מהנחת האינדוקציה יש 2^{H-1} עלים שם, ומהגדרת עץ מלא, לכל עלה שם יש 2 בנים, ונקבל מספר העלים הוא $2 \cdot 2^{H-1} = 2^H$.

ב. נסמן את מספר הצלעות של עץ מלא בגובה H ב- f_H . נשים לב שבעץ מלא בגובה $H - 1$ יש f_{H-1} צלעות, וכל עלה בעץ שלנו בגובה H , תורם צלע נוספת. ראינו בסעיף א שיש 2^H עלים בעץ שלנו, ולכן נקבל:

$$f_H = f_{H-1} + 2^H$$

עם תנאי התחלה:

$$f_0 = 0$$

נחשב את הראשונים ונגיע לנוסחה סגורה:

$$f_1 = f_0 + 2^1 = 2$$

$$f_2 = f_1 + 2^2 = 2 + 2^2$$

$$f_3 = f_2 + 2^3 = 2^1 + 2^2 + 2^3$$

אנחנו שמים לב שמתקיים:

$$f_H = \sum_{i=1}^H 2^i$$

זה סכום סדרה הנדסית $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, ולכן נקבל:

$$f_H = \frac{2(2^H - 1)}{2 - 1} = 2^{H+1} - 2$$

אחרי שהגענו לזה, צריך להוכיח את הנוסחה הזו, למשל באינדוקציה (תרגיל).

2. מצאו חסם תחתון ועליון לגובה של עץ בינארי מורש עם n קודקודים.
פתרון: טענה:

$$\lfloor \log_2(n) \rfloor \leq H \leq n - 1$$

הוכחה לחסם העליון: הגובה חסום במספר הצלעות שהוא $n - 1$.
הוכחה לחסם התחתון: נב"ש יש לנו עץ עם n קודקודים בגובה $H < \lfloor \log_2(n) \rfloor$ (שקול לגובה $H \leq \lfloor \log_2(n) \rfloor - 1$). בכל גובה h בדרך, מספר הקודקודים הוא לכל היותר 2^h , ולכן מספר הקודקודים הוא לכל היותר

$$n \leq \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor - 1} 2^i = \frac{1(2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor - 1} - 1)}{2 - 1} = 2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} \cdot 2^{-1} - 1 = \frac{n}{2} - 1 < n$$

בסתירה. בנוסף, חסם זה מתקבל עבור העץ הכמעט מלא, שבו עלים יכולים להיות בגובה H או $H - 1$.

3. דיברתם על מטריצת השכנויות של גרף.

(א) הוכיחו: $A_{i,j}^k$ זה מספר המסלולים באורך k מ- i ל- j .

(ב) יהי G גרף d רגולרי. הוכיחו ש- d הוא ע"ע של A . הדרכה: מצאו ו"ע (הוכיחו שהוא כזה) כך ש- Av נותן לנו סכימה של הצלעות היוצאות מקודקוד מסויים.