מבחן לדוגמא 1 – מד"ר להנדסה – 83-115

זמן המבחן: 3 שעות. מבחן פתוח: כל חומר עזר מותר. משקל כל שאלה 22 נק', ענו על כל השאלות.

1. מצאו פתרון למד"ר $(x^2+x+1)e^{(y^2)}y'=\frac{1}{y}$ המקיים $y(0)=-\sqrt{\ln\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)}$

מדובר במשוואה פרידה:

$$ye^{(y^2)}dy=\frac{1}{x^2+x+1}dx$$

נעשה אינטגרל לשני הצדדים:

$$\int ye^{(y^2)}dy=\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$

$$\frac{1}{2}e^{(y^2)}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right)+C$$

$$y^2=\ln\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C\right)$$

$$y=\pm\sqrt{\ln\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C\right)}$$

כעת על מנת לקיים את תנאי ההתחלה, נבחר ב $C=0$ ובפתרון השלילי:

$$y=-\sqrt{\ln\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)}$$

2. מצאו פתרון למד"ר $\sin(xy)y' = 2 - \frac{y}{x}\sin(xy)$ המקיים $y(2) = 0$.

נראה שבאמצעות גורם אינטגרציה ניתן להפוך את המד"ר למדוייקת:

$$0 = \left(2 - \frac{y}{x}\sin(xy)\right)dx - \sin(xy)dy = Pdx + Qdy$$

כעת

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{-\frac{1}{x}\left(\sin(xy) + xy\cos(xy)\right) + y\cos(xy)}{-\sin(xy)} = \frac{1}{x}$$

תלוי ב x בלבד ולכן גורם אינטגרציה הוא $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln(x)} = x$.

לכן המד"ר הבאה מדוייקת:

$$0 = \left(2x - y\sin(xy)\right)dx - x\sin(xy)dy = Pdx + Qdy$$

$$U(x,y) = -\int x\sin(xy)dy + c(x) = \cos(xy) + c(x)$$

$$U_x = -y\sin(xy) + c'(x) = 2x - y\sin(xy)$$

$$c'(x) = 2x$$

$$U(x,y) = \cos(xy) + x^2$$

לכן פתרון המד"ר נתון בצורה סתומה ע"י $\cos(xy) + x^2 = C$, נציב את תנאי ההתחלה ונקבל כי $\cos(0) + 4 = C$

.

סה"כ פתרון סופי הינו: $y = \frac{\arccos\left(5 - x^2\right)}{x}$

3. מצאו פתרון למד"ר $y''-3y'+2y=\sin\left(\frac{1}{e^x}\right)$ המקיים את תנאיי ההתחלה $y(0)=y'(0)=0$

ראשית נמצא פתרון כללי לבעייה ההומוגנית.

הפולינום האופייני הוא $p(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, לכן הפתרון הכללי הוא:

$$y=c_1e^x+c_2e^{2x}$$

נמצא פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית באמצעות וריאצית מקדמים:

$$c_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & e^{2x}\\ \sin\left(e^{-x}\right) & 2e^{2x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^x & e^{2x}\\ e^x & 2e^{2x}\end{vmatrix}}=\frac{-e^{2x}\sin\left(e^{-x}\right)}{e^{3x}}=-e^{-x}\sin\left(e^{-x}\right)$$

$$c_1(x)=-\int e^{-x}\sin\left(e^{-x}\right)dx=\begin{Bmatrix}t=e^{-x}\\ dt=-e^{-x}dx\end{Bmatrix}=\int\sin(t)dt=-\cos(t)=-\cos\left(e^{-x}\right)$$

$$c_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}e^x & 0\\ e^x & \sin\left(e^{-x}\right)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^x & e^{2x}\\ e^x & 2e^{2x}\end{vmatrix}}=\frac{e^x\sin\left(e^{-x}\right)}{e^{3x}}=e^{-2x}\sin\left(e^{-x}\right)$$

$$c_2(x)=\int e^{-2x}\sin\left(e^{-x}\right)dx=\begin{Bmatrix}t=e^{-x}\\ dt=-e^{-x}dx\end{Bmatrix}=-\int t\sin(t)dt=$$

$$=-\left(-t\cos(t)+\int\cos(t)dt\right)=t\cos(t)-\sin(t)=e^{-x}\cos\left(e^{-x}\right)-\sin\left(e^{-x}\right)$$

לכן הפתרון הפרטי הינו:

$$y_p=-\cos\left(e^{-x}\right)e^x+\left(e^{-x}\cos\left(e^{-x}\right)-\sin\left(e^{-x}\right)\right)e^{2x}=-e^{2x}\sin\left(e^{-x}\right)$$

לכן פתרון כללי למד"ר הינו

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - e^{2x} \sin\left(e^{-x}\right)$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$y(0) = c_1 + c_2 - \sin(1) = 0$$

$$y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} - \left(2e^{2x} \sin\left(e^{-x}\right) - e^{2x} e^{-x} \cos\left(e^{-x}\right)\right)$$

$$y'(0) = c_1 + 2c_2 - \left(2\sin(1) - \cos(1)\right) = 0$$

נחסר את המשוואה הראשונה מהשנייה ונקבל

$$c_2 = \sin(1) - \cos(1)$$

ולכן

$$c_1 = \cos(1)$$

סה"כ הפתרון המלא לשאלה:

$$y = \cos(1) e^x + \left(\sin(1) - \cos(1)\right) e^{2x} - e^{2x} \sin\left(e^{-x}\right)$$

4. מצאו פתרון למד"ר $xy' = x \cdot \sqrt[x]{e^y} + y$ המקיים $y(1)=3$

נשים לב שמדובר במד"ר הומוגנית:

$$y' = \sqrt[x]{e^y} + \frac{y}{x} = e^{\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{y}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

נציב $z = \frac{y}{x}$ ונקבל:

$$\int \frac{1}{\varphi(z) - z} dz = \ln|x| + C$$

$$\int e^{-z} dz = -e^{-z} = \ln|x| + C$$

$$z = -\ln\left(-\ln|x| + C\right)$$

$$y = -x \cdot \ln\left(-\ln|x| + C\right)$$

נציב את תנאי ההתחלה,

$$y(1) = -\ln(C) = 3$$

ולכן הפתרון הסופי הינו:

$$y = -x \cdot \ln\left(-\ln|x| + e^{-3}\right)$$

5. מצאו פתרון למד"ר התגובה להלם $(t+1)y''+2y'+(t+1)y=\delta(x)$ עם תנאי ההתחלה

$y(0)=1, y'(0)=-2$.

רמז: העזרו בהתמרת הלפלס $L\left((t+1)y\right)$

ראשית,

$$L((t+1)y)=L(ty+y)=-F'(s)+F(s)$$

כעת נבצע את ההתמרה למד"ר

$$L(ty'')+L(y'')+2L(y')+L(ty)+L(y)=L(\delta(x))$$

$$-2sF(s)-s^2F'(s)+y(0)+s^2F(s)-sy(0)-y'(0)+2sF(s)-2y(0)-F'(s)+F(s)=1$$

$$(s^2+1)\left(F(s)-F'(s)\right)=s$$

$$F(s)-F'(s)=\frac{s}{s^2+1}$$

$$L((t+1)y)=\frac{s}{s^2+1}=L(\cos(t))$$

לכן

$$(t+1)y=\cos(t)$$

$$y=\frac{\cos(t)}{t+1}$$

(שימו לב כי הפתרון אינו מקיים את תנאי ההתחלה לגבי המהירות.

זאת מכיוון שההלם ברגע הראשוני הוסיף למהירות ההתחלתית.)