תרגיל 7

.

.1

(א) נגדיר

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\\1&2&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$$

מצאו את הפולניום האופיני של A, ע"ע שלה ומרחבים עצמיים.
פתרון : נחשב

$$\begin{aligned}f_A(\lambda) &= |\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-1&\lambda-3&-2\\-1&-2&\lambda-1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-1&\lambda-3&-2\\-\lambda&0&\lambda\end{pmatrix}\right|\\ &= \lambda\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-1&\lambda-3&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}\right|=\lambda\left|\begin{pmatrix}\lambda-2&-2&-1\\-3&\lambda-3&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\right|\\ &= \lambda\left[(\lambda-2)(\lambda-3)-6\right]=\lambda\left[\lambda^2-5\lambda\right]=\lambda^2(\lambda-5)\end{aligned}$$

ולכן ע"ע הם $0,5$.
מרחבים עצמיים: עבור $\lambda=0$

$$N(A-0I)=N(A)$$

$$A\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda=0}=\left\{\begin{pmatrix}t\\-t\\t\end{pmatrix}|t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

עבור $\lambda = 5$

$$N(A-5I) = N\left(\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 10 & -15 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda=5} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2/3t \\ t \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(ב) [סעיף רשות, הוא לא יבדק] נגדיר

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}_{13})^{2\times 2}$$

מצאו את הפולניום האופיני של A, ע"ע שלה ומרחבים עצמיים.
פתרון : נחשב

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \right| = \\ &= [(\lambda-1)(\lambda-3)-2] = \lambda^2 - 4\lambda + 1 = \lambda^2 + 9\lambda + 1 = (\lambda-6)(\lambda-11) \end{aligned}$$

ולכן ע"ע הם $6, 11$.
מרחבים עצמיים: עבור $\lambda = 6$

$$N(A-6I) = N\left(\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda=6} = \left\{ \begin{pmatrix} 3t \\ t \end{pmatrix} | t \in \mathbb{Z}_{13} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

עבור $\lambda = 11$

$$N(A-11I) = N(\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix})$$

$$\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -10 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda=11} = \left\{ \begin{pmatrix} 8t \\ t \end{pmatrix} | t \in \mathbb{Z}_{13} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הוכח כי ל A ול A^t יש אותם ע"ע. [הדרכה: הראו כי הפ"א של A ו A^t שווים]

פתרון : נחשב

$$f_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left|(\lambda I - A)^t\right| = \left|(\lambda I)^t - A^t\right| = \left|\lambda I - A^t\right| = f_{A^t}(\lambda)$$

(ב) תהא $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ נגדיר $\overline{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ע"י $\left(\overline{A}\right)_{i,j} = \overline{A_{i,j}}$ כלומר הצמדה של כל איבר ב A (הצמדה מרוכבת). עוד נגדיר $A^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ע"י $A^* = \left(\overline{A}\right)^t = \overline{A^t}$. למשל

$$\begin{pmatrix} 1-i & 2+5i \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 2-5i & -3 \end{pmatrix}$$

הוכיחו כי אם λ ע"ע של A אזי $\overline{\lambda}$ הוא ע"ע של A^* [הדרכה: הראו כי $\overline{\lambda}$ הוא ע"ע של $\overline{A}$ והשתמש בסעיף הקודם]

פתרון : נניח כי v הוא הו"ע המתאים כלומר

$$Av = \lambda v$$

נוכיח כי

$$\overline{A}\overline{v} = \bar{\lambda}\overline{v}$$

אכן, לכל $1 \le i \le n$ מתקיים כי

$$\left(\overline{A}\overline{v}\right)_i = \sum_{k=1}^n \left(\overline{A}\right)_{k,i} \left(\overline{v}\right)_i = \sum_{k=1}^n \overline{A_{k,i}}\overline{v_i} = \overline{\sum_{k=1}^n A_{k,i} v_i} = \overline{(Av)_i} = \overline{(\lambda v)_i} = \overline{\lambda v_i} = \bar{\lambda}\overline{v}_i = \left(\bar{\lambda}\overline{v}\right)_i$$

לפי סעיף קודם ל $\overline{A}$ ול A^* יש אותם ע"ע.

(ג) תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הוכיחו כי אם λ ע"ע של A אזי λ^k ע"ע של A^k לכל k טבעי.

פתרון : ניח כי v הוא הו"ע המתאים כלומר

$$Av = \lambda v$$

נוכיח כי

$$A^k v = \lambda^k v$$

באינדוקציה. עבור $k=1$ זהו הנתון. כעת נניח שהטענה נכונה עבור k, כלומר כי מתקיים $A^k v = \lambda^k v$ ונוכיח עבור $k+1$, כלומר נרצה להוכיח כי מתקיים

$$A^{k+1} v = \lambda^{k+1} v$$

אכן

$$A^{k+1} v = A\left(A^k v\right) = A\left(\lambda^k v\right) = \lambda^k A v = \lambda^k \lambda v = \lambda^{k+1} v$$

(ד) יהא Vמ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$. תהא $T : V \to V$ ה"ל ו $A = [T]_E^E$ מטריצה מייצגת (כאשר E בסיס כלשהוא של V). יהא $v \in V$ ו $\lambda \in \mathbb{F}$נסמן $v' = [v]_E$הוכיחו כי

$$Tv = \lambda v \iff Av' = \lambda v'$$

פתרון : מתקיים

$$Tv = \lambda v \iff [Tv]_E = [\lambda v]_E \iff [T]_E^E [v]_E = \lambda [v]_E \iff Av' = \lambda v$$

(ה) תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ יהא λ ע"ע של A ו $V_\lambda = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = \lambda v\}$ המרחב העצמי. הוכיחו כי $V_\lambda \leq \mathbb{F}^n$ הוא תת מרחב (מסקנה: כל צירוף לינארי של ו"ע המשויכים ל λ הוא גם ו"ע של λ, אם הוא שונה מאפס).

פתרון : יהיו $v, v' \in V_\lambda$ ו $\alpha \in \mathbb{F}$. צ"ל כי

$$v + \alpha v' \in V_\lambda$$

(ברור כי $0 \in V_\lambda$).

כלומר צריך לבדוק כי $A(v+\alpha v') = \lambda (v + \alpha v')$. אכן

$$A(v+\alpha v') = Av + \alpha A v' \underbrace{=}_{v,v' \in V_\lambda} \lambda v + \alpha \lambda v' = \lambda(v + \alpha v')$$

(ו) נתונה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה. ונתון

$$f_A(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$$

הפולינום האופיני שלה. מצאו A^{-1}. [הערה: עבור $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה הפיכה עם פ"א $f_A(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$ מתקיים כי $a_0 \neq 0$. ההוכחה ישירה מהעובדה כי $a_0 = f_A(0) = |A|$]

פתרון : כיוון ש A הפיכה אזי

$$a_0 = f_A(0) = |A - 0| = |A| \neq 0$$

בנוסף ממשפט קיילי המילטון מתקיים כי $f_A(A)=0$ ולכן, בהעברת אגף נקבל כי =ש

$$A^n+\sum_{k=1}^{n-1}a_kA^k=-a_0I$$

נכפול בהופכי של $-a_0$ _(כי הוא שונה מאפס) ונקבל כי

$$\underbrace{A(-a_0)^{-1}\left(A^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}a_kA^{k-1}\right)}_{A^{-1}}=I$$

ולכן

$$A^{-1}=(-a_0)^{-1}\left(A^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}a_kA^{k-1}\right)$$

(ז) נתונה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה. ונתון

$$f_A(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)$$

הפולינום האופיני שלה. נתון כי לכל $i\neq j$ מתקיים כי $\lambda_i\neq\lambda_j$ (כלומר כל הע"ע שונים). הוכיחו כי קיים בסיס $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ ל $\mathbb{F}^n$ המורכב מו"ע (כלומר לכל i מתקיים כי v_i הוא ו"ע של A)

פתרון : לכל $1\leq i\leq n$ מתקיים כי הר"א של λ_i הוא 1. כיוון ש ר"א ≤ר"ג ≤1 נקבל כי ר"ג =1 לכל ע"ע. כלומר קיים v_i ו"ע המקיים

$$Av_i=\lambda_iv_i$$

כיוון שו"ע של ע"ע שונים הם בת"ל נקבל כי $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ קבוצה בת"ל. כיוון שיש בה n איברים אזי לפי משפט השלישי חינם נקבל כי B בסיס.

בהצלחה!