תרגיל 6

18 בנובמבר 2018

1. הוכיחו: כל סודר $\beta > \omega$ ניתן להצגה יחידה בצורה: $\beta = \alpha + n$ עבור α גבולי, ו$n \in \omega$.
הוכחה:

נוכיח באינדוקציה:

ראשית, נוכיח קיום.

אם $\beta = \omega + 1$, אז ω גבולי, ו$1 \in \omega$.

כעת, נניח שהטענה נכונה לכל $\gamma < \beta$.

אם βגבולי, נקח $\beta = \beta + 0$.

אם β עוקב, נניח $\beta = \delta + 1$. $\delta = \alpha + n$. ולכן $\beta = \alpha + (n+1)$.

כעת נוכיח יחידות:

טענת עזר: אם $\alpha + n_1 = \beta + n_2$, ו$n_2 \geq n_1$, אז $\alpha = \beta + (n_2 - n_1)$.

הסבר: ידוע שאם $s(\gamma) = s(\delta)$ אז $\gamma = \delta$. מכאן ניתן להוכיח את הטענה באינדוקציה על הטבעיים.

כעת, אם $\beta = \alpha_1 + n_1 = \alpha_2 + n_2$. אזי, בה"כ $n_2 \geq n_1$. לכן $\alpha_1 = \alpha_2 + (n_2 - n_1)$.
אם $1 \geq n_2 - n_1$, נקבל שצד ימין הוא עוקב וצד שמאל גבוליף, סתירה. לכן $n_2 - n_1 = 0$, ומכאן, $\alpha_1 = \alpha_2$.

2. הוכיחו: לכל $\alpha > 1, \beta$ סודרים, $\alpha^\beta \geq \beta$.
פתרון:

נוכיח באינדוקציה על β.

עבור $\beta = 0$, כל סודר גדול או שווה ל0.

נניח נכונות לβ, נוכיח ל$\beta + 1$: $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \alpha > \beta \cdot 1 = \beta$, ולכן $\alpha^{\beta+1} \geq \beta + 1$.

נניח שβ סודר גבולי, והטענה נכונה לכל $\gamma < \beta$: $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma : \gamma < \beta\} \geq \sup\{\gamma : \gamma < \beta\} = \beta$.

3. הוכיחו/הפריכו:

   (א) אם $1 < \alpha < \beta$ ו$\gamma \neq 0$ הם סודרים, אזי $\alpha^\gamma < \beta^\gamma$
   הפרכה:
   נקח $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = \omega$. אזי $2 < 3$, אבל $2^\omega = s^\omega = \omega$.

(ב) אם $1 < \alpha \le \beta$ ו$\gamma \neq 0$ הם סודרים, אזי $\alpha^\gamma \le \beta^\gamma$
הוכחה:

נניח באינדוקציה על γ:

אם $\gamma = 1$, ברור.

נניח שהטענה נכונה לγ ונוכיח ל$\gamma + 1$: $\alpha^{\gamma+1} = \alpha^\gamma \alpha \le \beta^\gamma \beta = \beta^{\gamma+1}$

נניח שγ סודר גבולי והטענה נכונה לכל $\delta < \gamma$: $\alpha^\gamma = \sup\{\alpha^\delta : \delta < \gamma\} \le \sup\{\beta^\delta : \delta : \gamma\} = \beta^\gamma$

(ג) לכל שלושה סודרים, $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma\beta^\gamma$.
הפרכה:

נקח $\alpha = \omega, \beta = 2, \gamma = 2$.

$(\omega 2)^2 = (\omega 2)(\omega 2) = \omega(2\omega)2 = \omega^2 2$

$\omega^2 2^2 = \omega^2 4$.

כמו כן, $\omega^2 4 > \omega^2 2$.

4. הציגו את הסודר הבא בבסיס ω: $5^{(\omega^3+4)} + 3$.
בונוס: בסוף השיעור הערנו שניתן להציג סודרים בכל בסיס שגדול מ1. הציגו את הסודר הנ"ל גם בבסיס 2.
פתרון:

ראשית, נשים לב ש$\omega = 5^\omega$

$5^{(\omega^3+2)} + 3 = 5^{\omega^3} \cdot 5^2 + 3 = (5^\omega)^{\omega^2} 25 + 3 = \omega^{(\omega^2)} \cdot 25 + \omega^0 \cdot 3$.

בסיס 2: $\omega^{(\omega^2)} \cdot 25 + \omega^0 \cdot 3 = (2^\omega)^{(\omega^2)} \cdot 25 + 3 = 2^{\omega^3}(2^4 + 2^3 + 2^0) + 2^1 + 2^0 =$
$2^{\omega^3+4} + 2^{\omega^3+3} + 2^{\omega^3} + 2^1 + 2^0$.