

אלגברה לינארית - תרגול 5

16 בנובמבר 2020

1 הפיכות

נדבר כרגע רק על מטריצות ריבועיות.

מטריצה ריבועית A נקראת הפיכה אם קיימת B כך ש- $AB = BA = I$.
ראיתם: המטריצה ההופכית הינה יחידה. מספיק להראות שיש B כך ש- $AB = I$.

דוג': ההופכית של $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ היא A , כי:

$$A^2 = I$$

את ההופכית מסמנים A^{-1} .

ראיתם בהרצאה: לכל מטריצות $A_1, \dots, A_k$, הן הפיכות אם ורק אם המכפלה שלהן $A_1 \cdots A_k$ הפיכה. במילים קצרות: **מכפלה היא הפיכה אם"ם המוכפלות הפיכות.**
תרגילים:

1. תהא A ריבועית. הוכיחו:

(א) A הפיכה אם"ם קיים $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ כך ש- A^n הפיכה.
פתרון: $\Leftarrow$: נתון ש- A הפיכה. צריך למצוא $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ כך ש- A^n הפיכה.
ואכן עבור $n = 1$ נקבל $A^n = A^1 = A$ הפיכה.
 $\Rightarrow$: נתון שקיים n כך ש- A^n הפיכה. צ"ל: A הפיכה: נתון שהמכפלה A^n הפיכה, לפי המשפט לעיל כיון שהמכפלה $A^n = A \cdot A \cdots A$ הפיכה אז כל המוכפלות הפיכות ובפרט A הפיכה.

(ב) A הפיכה אם"ם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: A^n הפיכה.
פתרון: $\Leftarrow$: נתון ש- A הפיכה, לכן לפי המשפט מכפלה של הפיכות היא הפיכה ונקבל שלכל n המטריצה A^n היא מכפלה של הפיכות ולכן הפיכה.
 $\Rightarrow$: נתון שלכל n המטריצה A^n הפיכה, הדבר נכון בפרט עבור $n = 1$ ולכן A הפיכה.

2. הוכיחו שמטריצה עם עמודות אפסים איננה הפיכה.

פתרון: תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ עם עמודות אפסים, נסמן את העמודה ב- $1 \leq i \leq n$. כלומר,

$$C_i(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{נניח בשלילה שהיא הפיכה, לכן יש } A^{-1} \text{ כך ש- } AA^{-1} = I$$

נשתמש בכפל "עמודה", ונקבל:

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = C_i(I) = C_i(A^{-1}A) = A^{-1}C_i(A) = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו $e_i = 0$ בסתירה לכך שב- e_i יש 1 במקום ה- i .

הערה: מטריצת היחידה ניתנת להגדרה בעזרת:

$$I_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

1.1 אלגוריתם למציאת ההופכית

כזכור, דיברנו על פעולות שורה של מערכת משוואות ומטריצות. מסתבר שכל פעולת שורה ניתנת להגדרה ע"י כפל של מטריצה משמאל. איזו מטריצה? המטריצה הנובעת מביצוע פעולה זו על מטריצת היחידה I . למשל: המטריצה הבאה מבצעת פעולת: הוספת השורה השנייה והשלשית לשורה הראשונה.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

משפט: אם $E = \rho(I)$ מטריצה אלמנטרית (מבצעת פעולת שורה על I , וכן על כל מטריצה כאשר מכפילים אותה משמאל למטריצה). אז E הפיכה ומתקיים: $E^{-1} = \rho^{-1}(I)$. לדוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כי המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ מבצעת את הפעולה: $R_1 - R_3 \rightarrow R_1$. הפעולה ההופכית

היא $R_1 + R_3 \rightarrow R_1$, והמטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ עושה את הפעולה ההופכית על I .

משפט: A הפיכה אם"ם הצורה הקנונית שלה היא I . מסקנה: כדי למצוא את ההופכית של A : נדרג אותה קנונית כאשר לידה נדרג באותו אופן את I , ואז: אם הגענו מ- A ל- I אז A הפיכה וההופכית היא תוצאת הדירוג על I . אם לא הגענו ל- I אז A לא הפיכה.

תרגילים:

1. האם $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ הפיכה? אם כן מצאו את ההופכית.

פתרון: נדרג אותה ליד I :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{\frac{1}{2}R_3 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_3 \rightarrow R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - R_2 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ וכן } I \text{ היא } A$$

שימו לב: שדירוג A הוא בעצם הכפלה במטריצות אלמנטריות E_1, E_2, E_3 , ובעצם מה שקיבלנו:

$$E_3 E_2 E_1 A = I$$

ולכן

$$E_3 E_2 E_1 = A^{-1}$$

אבל המטריצה $E_3E_2E_1$ היא בעצם הפעלת פעולות אלה על I , וזה הסבר לאלגוריתם.

(א) בטאו את A כמכפלת אלמנטריות.

פתרון: מתקיים:

$$A^{-1} = E_3E_2E_1$$

ולכן:

$$A = (A^{-1})^{-1} = (E_3E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1}$$

כי באופן כללי, אם A, B הפיכות אז:

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

כי:

$$B^{-1} \cdot A^{-1}AB = I$$

2. תהא A ריבועית כך שמתקיים: $A + A^2$ הפיכה. הוכיחו: $A, A + I$ הפיכות.

פתרון: לפי חוק הפילוג נקבל:

$$A + A^2 = A^2 + A = A(A + I)$$

(חיבור חילופי). כיון ש- $A + A^2$ הפיכה, אז $A(A + I)$ הפיכה, ומכפלה הפיכה גוררת שהמוכפלות הפיכות וסיימונו.

3. הגדרה: מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ $0 \neq A$ נקראת "מחלקת אפס" אם קיימת $0 \neq B \in \mathbb{F}^{n \times n}$

כך ש- $AB = 0$. הוכיחו: $A \neq 0$ לא הפיכה אמ"ם היא מחלקת אפס.

פתרון: $\Rightarrow$ (ראו גם הרצאה). נתון ש- A מחלקת אפס, כלומר, קיימת $0 \neq B$ כך ש- $AB = 0$. צריך להוכיח שהיא לא הפיכה: נב"ש שהיא הפיכה ונקבל $I = A^{-1}A$, ואז כאשר נכפיל ב- B מימין נקבל:

$$B = IB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}0 = 0$$

וקיבלנו $B = 0$ בסתירה.

הערה: היה אפשר לקצר ובהינתן ש- A הפיכה, A^{-1} ההופכית, להכפיל את המשוואה $AB = 0$ ב- A^{-1} משמאל ולקבל:

$$B = IB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}0 =$$

וקיבלנו $B = 0$ בסתירה.

$\Leftarrow$: ניזכר באלגוריתם הדירוג שאומר שנדרג את A קנונית ואז אם הגענו ל- I ז"א ש- A הפיכה, ואחרת ז"א A לא הפיכה. לכן אם נבצע דירוג קנוני של A , כיון שהתוצאה איננה I נקבל שיש שורת אפסים (לפחות אחת) ומשתנה חופשי (לפחות אחד). לכן, יש פתרון שאיננו פתרון האפס למערכת ההומוגנית $Ax = 0$. (למשל אם הדירוג הקנוני של A הוא:

$$\begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

אז $\begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ -3t \\ t \end{pmatrix}$ פתרון לכל t , וכמובן שיש הרבה פתרונות שונים מ-0).

בסה"כ קיבלנו שאם A לא הפיכה אז למערכת $Ax = 0$ יש פתרון שאיננו פתרון האפס. כלומר, יש $v \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ כך ש- $Av = 0$. כעת נסמן:

$$B = \begin{pmatrix} v & \dots & v \\ \underbrace{\hspace{1cm}}_{n \text{ times}} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$$

ונחשב את העמודות של AB : לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים:

$$C_i(AB) = A \cdot C_i(B) = Av = 0$$

$$AB = \begin{pmatrix} Av & \dots & Av \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = 0$$

ולכן $AB = 0$.

מטריצה היא הפיכה אם"ם למערכת ההומוגנית $Ax = 0$ יש רק את הפתרון הטריטויאלי. או באופן שקול: מטריצה היא לא הפיכה אם"ם למערכת ההומוגנית $Ax = 0$ יש פתרון שאיננו הפתרון הטריטויאלי.