

מבוא לטופולוגיה – תרגיל 8 (קצר בגלל הבוחן)

תזכורת. קבוצת קנטור

סימונים.

יהיו $I = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. נסמן: $l(I) = [a, a + \frac{1}{3}(b - a)]$

$r(I) = [a + \frac{1}{3}(b - a), a + \frac{2}{3}(b - a)]$

נבנה באינדוקציה סדרת תת-קבוצות ב- \mathbb{R} , כלומר:

לכל $n \geq 0$ נבנה 2^n קטעים סגורים I_i^n ותת-קבוצה $K_n \subset \mathbb{R}$ כך ש-

$$K_n = \bigcup_{i=1}^{2^n} I_i^n$$

כאשר:

בסיס ($n = 0$): $K_0 = I_1^0 = [0, 1]$

שלב לדוגמה ($n = 1$): $I_1^1 = l(I_1^0)$, $I_2^1 = r(I_1^0)$; $K_1 = I_1^1 \cup I_2^1$

צעד האינדוקציה. יהיו ל- $n \geq 0$ בנויים קטעים סגורים I_i^n ($1 \leq i \leq 2^n$) ותת-קבוצה $K_n \subset \mathbb{R}$ כך ש-

$$K_n = \bigcup_{i=1}^{2^n} I_i^n$$

אזי נסמן לכל i : $I_{2i-1}^{n+1} = l(I_i^n)$, $I_{2i}^{n+1} = r(I_i^n)$

ונגדיר:

$$K_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{2^{n+1}} I_i^{n+1}$$

== (סוף בניה)

קל לראות ש- $K_0 \supset K_1 \supset \dots$

הגדרה. קבוצת קנטור זה החיתוך:

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$$

נסמן ב- $length(I)$ האורך של הקטע I .
 נסמן ב- $L_\Sigma(K_n)$ את סכום אורכי הקטעים I_i^n המוכללים ב- K_n .
ראינו בכיתה:

$$length(I_i^n) = \frac{1}{3^n}$$

$$L_\Sigma(K_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$$

הוחנו בכיתה את התכונות:

- (א) $K \neq \emptyset$
- (ב) K קבוצה סגורה
- (ג) K קבוצה קומפקטית.
- (ד) K אינה מכילה שום קטע.

שאלה 1

הוכיכו תכונות הבאות של קבוצת קנטור:

(ה) K^c צפוף ב- $[0,1]$

(ו) $K^\circ = \emptyset$

(ז) רכיב קשירות וקשירות מסילתית של K הוא נקודון.

שאלה 2

הגדרה 1. קטע $[a, b]$ ב- \mathbb{R}^n זאת קבוצה:

$$[a, b] = \{a + t(b - a) \mid t \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^n$$

או בקואורדינטות:

$$[a, b] = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = a_i + t(b_i - a_i), 1 \leq i \leq n\}$$

הגדרה 2 הקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת *קמורה* אם :
 $x, y \in A \Rightarrow [a, b]$
הוכיחו שכל קבוצה קמורה ב- \mathbb{R}^n קשירה מסילתית.

תרגיל 3

הגדרה 3. הקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת *תחום כוכבי* ב- \mathbb{R}^n
(עם המרכז בנקודה $o \in A$ אם לכל $x \in A$ מתקיים $[o, x] \subseteq A$).

הוכיחו שכל תחום כוכבי ב- \mathbb{R}^n הוא קבוצה קשירה מסילתית.