פתרון תרגיל בית 5

שאלה 1

(1) תהי $\mathbb{Q}$ חבורת המספרים הרציונליים (עם פעולת החיבור), ותהי $\mathbb{Z}$ (חבורת המספרים השלמים) תת חבורה שלה.

א. הוכיחו שב- $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ כל איבר הוא מסדר סופי.

ב. הראו כי התת חבורה הנוצרת ע"י המחלקות של $\frac{1}{10}$ ו- $\frac{3}{8}$ היא ציקלית.

מהו הסדר של תת חבורה זו, ומהו האינדקס שלה בחבורה הגדולה?

(2) נתבונן ב- $G=GL_2(\mathbb{Q},\cdot)$ ובתת-החבורה $H=\left\{\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}: a\in\mathbb{Q}\right\}$. חשבו את $[G:H]$.

פתרון

(1)

א) נזכור שאיבר היחידה ב- $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ הוא המחלקה $0+\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$ ולכן צריך לכל איבר $x\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ למצוא n כך ש- $n\cdot x=\mathbb{Z}$ (זכרו שהפעולה פה היא חיבור של מחלקות ולכן העלאה ב"חזקה" n היא כפל ב-n). כל איבר בחבורת המנה הזו נוכל לכתוב באופן הבא: $\frac{a}{b}+\mathbb{Z},\ a,b\in\mathbb{Z}, b>0$. אזי $b\left(\frac{a}{b}+\mathbb{Z}\right)=a+\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$. לכן $\frac{a}{b}+\mathbb{Z}$ הוא לכל היותר מסדר b.

ב) מתקיים $\left\langle\frac{3}{8}+\mathbb{Z},\frac{1}{10}+\mathbb{Z}\right\rangle=\left\langle\frac{1}{40}+\mathbb{Z}\right\rangle$ (מדוע?). הסדר של החבורה הוא 40 והאינדקס שלה אינסופי (כי,למשל, לכל שני ראשוניים $p_1\neq p_2$ שונים מ-$2,5$ מתקיים $\frac{1}{p_1}+\left\langle\frac{1}{40}+\mathbb{Z}\right\rangle\neq\frac{1}{p_2}+\left\langle\frac{1}{40}+\mathbb{Z}\right\rangle$; לכן יש אינסוף קוסטים).

(2)

נגדיר איבר ב-G $g_b=\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ עבור $b\in\mathbb{Q}^*$. מתקיים $g_bH=\left\{\begin{pmatrix}b & ba\\ 0 & 1\end{pmatrix}: a\in\mathbb{Q}\right\}$. לכן, אם $c\neq d$ הם שני רציונאליים שונים מאפס, מתקיים $g_cH\neq g_dH$. מכאן שמספר הקוסטים הוא כמספר הרציונאליים.

לכן $[G:H]=\infty$.

שאלה 2

א. תהי $H \le G$. הראו ש-$H \cap Z(G) \subseteq Z(H)$, ותנו דוגמא שבה זו הכלה אמיתית.

ב. בכל סעיף תנו דוגמא לחבורה G ולתת חבורה $H \le G$ המדגימה את הדרוש:

1. $Z(H) \subset Z(G)$ (הכלה ממש)
2. $Z(G) \subset Z(H)$
3. $Z(H)$ אינו מוכל ב-$Z(G)$ ואינו מכיל אותו.

פתרון

א. יהי $x \in H \cap Z(G)$. אזי $x \in H$. צ"ל: לכל $h \in H$ מתקיים $xh = hx$. אך $x \in Z(G)$ ולכן מתחלף עם כל איברי G ובפרט עם כל איברי H.

דוגמא לכך שיש הכלה אמיתית:

$G = D_4, H = \langle \sigma \rangle \ , Z(G) = \langle \sigma^2 \rangle, Z(H) = H$.

ב. 1. $G = \mathbb{Z},\ H = 2\mathbb{Z}$.

2. הדוגמא מסעיף (א).

3. $G = D_4, H = \langle \tau \rangle$.

שאלה 3

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות ומצאו גרעין עבור הנכונות שבהן:

א. קיים אפימורפיזם $(\mathbb{Z},+) \to \mathbb{Z}_{2012}$

ב. קיים איזומורפיזם $D_5 \to \mathbb{Z}_{10}$

ג. קיים אפימורפיזם $(\mathbb{Q},+) \to S_5$

ד. קיים מונומורפיזם $S_3 \to GL_3(\mathbb{R})$

פתרון

א. קיים אפימורפיזם $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{2012}$ המוגדר על ידי $f(n) = n \bmod (2012)$.
מתקיים $\ker f = 2012\mathbb{Z}$.

ב. לא קיים איזומורפיזם, משיקולי אבליות.

ג. לא קיים אפימורפיזם, משיקולי אבליות.

ד. קיים. נשלח כל תמורה $\sigma \in S_3$ למטריצה בגודל 3×3 כך שהאיברים במקומות $(i, \sigma(i))$ הם 1, וכל שאר האיברים הם 0.
בדקו שזהו אכן מונומורפיזם.
מכיוון שזהו מונומורפיזם, הגרעין הוא טריוויאלי.

שאלה 4 (ברמה של מבחן)

א. אם $N \triangleleft G$ אזי $Z(N) \triangleleft G$.

ב. מצאו תת חבורה מאינדקס 3 של S_4, והראו שהיא אינה נורמלית.

פתרון

א. צריך להראות שלכל $g\in G$ מתקיים $gZ(N)g^{-1}\subseteq Z(N)$. יהי $x\in gZ(N)g^{-1}$, אזי קיים $n\in Z(N)$ כך ש- $x=gng^{-1}$. מכיוון ש- $n\in Z(N)\subseteq N$ ו- $N\lhd G$, מתקיים $x\in N$. כעת נותר להראות שלכל $t\in N$ מתקיים $xt=tx$, או $gng^{-1}t=tgng^{-1}$ וזה שקול ל- $ng^{-1}tg=g^{-1}tgn$. אבל $n\in Z(N)$ ו- $g^{-1}tg\in N$ (שוב, בגלל הנורמליות) ולכן הוכחנו הדרוש.

ב. למעשה יש למצוא תת חבורה מסדר 8 שהיא לא נורמלית. הצעה לחבורה כזאת: $H=\langle(1234),(12)(34)\rangle$. איבריה הם: $\{id,(1234),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(1432),(13),(24)\}$. ניתן לראות שהיא לא נורמלית, שכן היא מכילה חילופים, אבל לא את כל החילופים.

שאלה 5

א. תנו דוגמא נגדית לטענה השגויה הבאה: אם $A,B\lhd G$, ו- $G/A\cong B$ אזי $G/B\cong A$.

ב. נניח $K\lhd G$ ו- $G/K\cong\mathbb{Z}$. הוכיחו שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת ב- G תת חבורה מאינדקס n.

פתרון

א. ניקח למשל $G=D_4$. וניקח שתי תתי חבורות נורמליות: $A=\langle\sigma\rangle, B=Z(D_4)=\langle\sigma^2\rangle$. אכן מתקיים $D_4/\langle\sigma\rangle\cong\langle\sigma^2\rangle$ (כי יש חבורה יחידה מסדר 2). אך לא מתקיים ש- $D_4/\langle\sigma^2\rangle\cong\langle\sigma\rangle$, שכן החבורה מימין היא ציקלית, והחבורה משמאל היא לא (זכרו שהוכחנו בתרגול טענה אודות חבורה מודולו המרכז שלה).

ב. מכיוון ש- $G/K\cong\mathbb{Z}$, קיים אפימורפיזם $f_1:G\to\mathbb{Z}$. כמו כן, קיים אפימורפיזם $f_2:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n$. אזי העתקת ההרכבה $\phi=f_2\circ f_1:G\to\mathbb{Z}_n$ היא גם כן אפימורפיזם. לכן תת החבורה הדרושה היא $\ker\phi$, ולפי משפט איזומורפיזם ראשון קל להיווכח שהיא אכן מאינדקס n.

שאלה 6

תהי G חבורה, $a,b\in G$ כך ש- $ab=ba$ ו- $\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=1_G$ אזי $o(ab)=lcm(o(a),o(b))$.

פתרון

נראה תחילה ש- $lcm(o(a),o(b))\,|\,o(ab)$. נסמן $o(ab)=t$. מתקיים $1=(ab)^t=a^tb^t$, כלומר $a^t=b^{-t}$. מכיוון ש- $\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=1_G$ (ומכך ש- $t>0$) מתקיים $a^t=b^{-t}=1_G$. כלומר, $o(a)|t\ \wedge o(b)|t$ ולכן $lcm(o(a),o(b))|t$.

בכיוון השני: נסמן $o(a)=n, o(b)=m$, $l=lcm(o(a),o(b))$. מתקיים $(ab)^l=a^lb^l=1$ (שכן, $n|l\ \wedge\ m|l$) ולכן $o(ab)|l$.

משני הכיוונים מסיקים הדרוש.

שאלה 7

הוכיחו ש $\langle(1\,n),(1\,2\ldots n-1)\rangle=S_n$.

פתרון

דרך אחת: $(1\,n)(1\,2\ldots n-1)=(1\,2\ldots n-1\,n)$ לכן $(1\,2\ldots n-1\,n)\in\langle(1\,n),(1\,2\ldots n-1)\rangle$ כמו כן עבור $\pi=(1\,2\ldots n-1\,n)$ מתקיים $\pi(1\,n)\pi^{-1}=(\pi(1)\,\pi(n))=(2\,1)=(1\,2)$ ולכן $(1\,2\ldots n-1\,n),(1\,2)\in\langle(1\,n),(1\,2\ldots n-1)\rangle$. כעת מכיוון ש $\langle(1\,2\ldots n-1\,n),(1\,2)\rangle=S_n$ (הראינו בתרגול) נקבל ש $\langle(1\,n),(1\,2\ldots n-1)\rangle=S_n$.

דרך שניה-מתקיים:

$$(1\,2\ldots n-1)(1\,n)(1\,2\ldots n-1)^{-1}=(2\,n)$$

$$(1\,2\ldots n-1)(2\,n)(1\,2\ldots n-1)^{-1}=(3\,n)$$

וכן הלאה. בתהליך זה אנו משיגים את כל החילופים מהצורה $(i\,n)$.
ולגביהם כבר הוכחנו שהם יוצרים את החבורה.

שאלת בונוס

תהיינה $A,B,C\triangleleft G$, כך ש $B\subseteq A$. הוכיחו את האיזומורפיזם

$$BC/(A\cap BC)\cong C/(A\cap C).$$

פתרון

לפי מודולריות (ראיתם בהרצאה) מתקיים $A\cap(CB)=(A\cap C)B$. ממשפט איזומורפיזם שני ידוע ש: $C/C\cap D\cong CD/D$ לכל תת חבורה נורמלית D.
נבחר $D=A\cap C\cdot B$ ונקבל הדרוש.