תרגיל 8 - אינפי 4 - תשע"ט

תרגיל 1. תהיינה $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות. חשבו את

$$\iint_M \left(f\left(x\right),g\left(y\right),h\left(z\right)\right)\cdot N\mathrm{d}S$$

כאשר S הוא השפה של של התיבה

$$0\le x\le a,0\le y\le b,0\le h\le c$$

ו N הוא נורמל היחידה החיצוני.

תרגיל 2. מצאו את השטח של הגוף הנוצר מחיתוך המישור $ax+by+cz=d$ עם הגליל $x^2+y^2\le 1$ עבור $a,b,c\neq 0$. כמו כן, תארו את הצורה הגאומטרית של השמטח המתקבל על ידי החיתוך. (בונוס: תנו תאור מדוייק מדוייק כפונקציה של a,b,c ומצאו את השטח בלי לחשב אינטגרל).

תרגיל 3. חשבו בעזרת משפט הדיברגנץ את האינטגל $\iint_M F\cdot N\mathrm{d}S$ עם הנורמל החיצוני N, כאשר F ו M נתונים על ידי:

1. $F=(yx,2y,-z)$ ו $M=\left\{(x,y,z)\,|x^2+y^2+z^2=4\right\}$.
2. $F=(y-z,z-x,x-y-1)$ ו $M=\left\{(x,y,z)\,|x^2+y^2=z^2,0\le z\le 1\right\}$. (רמז: אם רוצים להשתמש במשפט הדיברגנץ, יש ל"סגור" את המשטח תחילה).
3. $F=\left(x^2,y^2,z^2\right)$, $M=\left\{(x,y,z)\,|(x-1)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=1\right\}$.
4. $F=\left(x^2,y^2,z^2\right)$, כאשר M הוא שפת הקובייה $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

תרגיל 4. נסמן על ידי $\triangle u$ את אופרטור הלפלסיאן $\mathbb{R}^3$ המוגדר על ידי

$$\triangle u=\frac{\partial u^2}{\partial x^2}+\frac{\partial u^2}{\partial y^2}+\frac{\partial u^2}{\partial z^2}.$$

(ההגדרה עובדת לכל מימד, אבל בשאלה הזאת אנחנו עובדים עם $\mathbb{R}^3$). יהי V תחום קומפקטי שמקיים את תנאי המשפט דיברגנץ. יהיו v,u גזירות פעמיים ברציפות ב V, ויהי n נורמל היחידה החיצוני ל S. הוכיחו שמתקיים השוויון

$$\iiint_V v\triangle u-u\triangle v=\iint_{\partial V} v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S$$

כאשר האינטגרל מצד שמאל הוא אינטגרל משולש יחידה והאינטגרל מצד ימין הוא אינטגרל משטחי מסוג ראשון. הדרכה: ניתן להשתמש בזהות

$$.\frac{\partial f}{\partial w}(a)=\nabla f(a)\,w$$

כזכור, נגזרת כיוונית $\frac{\partial f}{\partial w}(a)$ מוגדרת על ידי

$$.\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tw)-f(a)}{t}$$

תרגיל 5. חשבו בעזרת משפט הדיברגנץ על מנת לחשב את הנפחים הבאים:

1. התחום בחסום בין $x^2+y^2+z^2=1$ ו המישור $z=\frac{1}{2}$. (החלק העליו - בעל רכיב z חיובי).
2. התחום המקיים $x^2+y^2\le(2-z)^2$ הנמצא בין המישורים $z=0$ ו $z=1$.

תרגיל 6. מצאו פרמטריזציה חיובית עבור עקומה C במקרים הבאים.

1. $C=\left\{(x,y,z):5-x^2-y^2=z\wedge x+y+z=1\right\}$ ביחס לנורמל החיצוני של הפרבולואיד $z=5-x^2-y^2$ ביחס לחקל העליון של הפרבולואיד. (כלמר $z>1-x-y$)
2. $C=\left\{(x,y,z):z=x^2+y^2\wedge z=y\right\}$ בעלת אוריינטציה חיובית ביחס לנורמל $(0,-1,1)$ לדיסק המישורי $z=y$.

תרגיל 7. חשבו בעזרת משפט סטוקס חשבו את האינטגרלים הבאים:

1. $\int_\Gamma y\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y-z\mathrm{d}z$ כאשר $\Gamma=\left\{(x,y,z):x^2+y^2=4,z=1\right\}$ מכוונת נגד כיוון השעון אם מסתכלים מהכיוון החיובי של ציר z.
2. $\int_\Gamma y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$ כאשר $\Gamma=\left\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=4\wedge z=\sqrt{x^2+y^2}\right\}$ מכוונת נגד כיוון השעון עם מסתכלים מהכיוון החיובי של ציר z.
3. $\int_\Gamma y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$ כאשר $\Gamma=\left\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=1\wedge z=x\right\}$ מכוונת חיובית ביחס לנורמל $(-1,0,1)$ למישור $z=x$.
4. $\int_\Gamma(z+2xyz)\,\mathrm{d}x+x^2z\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z$ כאשר Γ הוא שפה של המשטח המישורי $3x+2y-z=0$ הנמצא בתוך הכדור $\left\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le 4\right\}$ ו Γ מכוונת חיובית ביחס לנורמל $(-3,-2,1)$ למישור $3x+2y-z=0$.