

אנליזה מודרנית - בוחן

מתרגלים: רועי אבל ותמר בר-און.
עליכם לענות על כל השאלות.
המשקל של כל סעיף הוא 22 נקודות.
הערה: בכל הבוחן, שכתוב את המילה "מדידה", הכוונה למידת לבג.
בהצלחה!

1. נגדיר קבוצה $\hat{C}$ באופן הבא: נסתכל על הקטע $[0, 1]$. בשלב הראשון נוריד ממרכזו קטע פתוח באורך חצי. בשלב השני התקבלו שני קטעים באורך $\frac{1}{4}$, ונוריד מהמרכז של כל אחד מהם קטע פתוח באורך $\frac{1}{8}$. בשלב ה- i יש 2^{n-1} קטעים, ומורידים מהמרכז של כל אחד מהם קטע פתוח באורך $\frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}$. (כלומר, בכל שלב יש איחוד סופי של קטעים $\bigcup I_i$). ומכל קטע I_i מורידים מאמצעו קטע פתוח באורך $\frac{1}{2^i} l(I_i)$, כך שנשארים שני קטעים סגורים בקצוות, שאורך כל אחד מהם הוא רבע מאורך הקטע המקורי). נסמן את הקבוצה המתקבלת בסוף התהליך ב- $\hat{C}$.

(א) הוכיחו ש- $\hat{C}$ מדידה.
הוכחה:

נסמן ב- $\hat{C}_n$ את הקבוצה שמתקבלת הסוף השלב ה- n . למשל, $\hat{C}_0 = [0, 1]$.
 $\hat{C}_1 = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$.
 $\hat{C}_2 = [0, \frac{1}{16}] \cup [\frac{3}{16}, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, \frac{13}{16}] \cup [\frac{15}{16}, 1]$.
וכן הלאה.
 $\hat{C} = \bigcap \hat{C}_n$. נוכיח שלכל n , $\hat{C}_n$ היא קבוצה סגורה. נעשה את זה באינדוקציה.
ובכן, $\hat{C}_0 = [0, 1]$ קבוצה סגורה. נניח ש- $\hat{C}_n$ סגורה. $\hat{C}_{n+1}$ מתקבל מ- $\hat{C}_n$ ע"י הורדת קטעים פתוחים. ידוע מטופולוגיה שקבוצה סגורה פחות קבוצה פתוחה היא סגורה. לכן, $\hat{C}$ סגורה, כחיתוך של קבוצות סגורות. כל קבוצה סגורה מדידה.

(ב) חשבו את $m(\hat{C})$.
פתרון:

לכל n , $\hat{C} \subseteq \hat{C}_n$, ולכן $m(\hat{C}) \leq m(\hat{C}_n)$. נוכיח באינדוקציה ש- $m(\hat{C}_n) = (\frac{1}{2})^n$. למעשה, נוכיח ש- $\hat{C}_n$ שווה לאיחוד של 2^n קטעים, שהאורך של כל אחד הוא $(\frac{1}{4})^n$. ובכן, $\hat{C}_0$ הוא איחוד של קטע אחד באורך 1. נניח ש- $\hat{C}_n$ הוא איחוד של 2^n קטעים באורך $(\frac{1}{4})^n$. בשלב ה- $n+1$ מורידים מכל קטע את אמצעו, ולכן הוא הופך ל-2 קטעים. כלומר, כעת יהיו 2^{n+1} קטעים. כמו כן, מכל קטע החסרנו קטע באורך חצי ממנו, ולכן כל אחד מהקטעים שנותרו הוא באורך

רבע מאורך הקטע הקודם. לכן כל קטע הוא באורך $(\frac{1}{4})^{n+1}$. $(\frac{1}{4}) \cdot (\frac{1}{4})^n = (\frac{1}{4})^{n+1}$.
 מסקנה: $m(\hat{C}_n) = 2^n \cdot (\frac{1}{4})^n = (\frac{1}{2})^n$. לבסוף, $m(\hat{C}) \leq (\frac{1}{2})^n$ לכל n , ולכן $m(\hat{C}) = 0$.

2. תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה כלשהי. נגדיר את התומך של f להיות: $supp(f) = cl(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\})$.

(א) הוכיחו שאם f מדידה אז $supp(f)$ קבוצה מדידה.
 פתרון:

סגור של קבוצה הוא תמיד קבוצה סגורה, וכל קבוצה סגורה מדידה.

(ב) הוכיחו שאם $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ מדידה ו $\int f dm = \infty$ אז לכל $M > 0$ קיימת פונקציה $g_M : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ כך ש: g_M מדידה, $m(supp(g_M)) < \infty$, $\int g_M dm > M$ ו $0 \leq g_M \leq f$.
 פתרון:

נסמן: $A_n = f^{-1}(-\infty, n)$ מכיוון ש f מדידה, A_n קבוצה מדידה. כעת, נבנה סדרה של פונקציות: $f_n = f \cdot I_{[-n, n] \cap A_n}$. נשים לב ש $[-n, n] \cap A_n$ מדידה כחיתוך של מדידות, ולכן האינדקטור שלה מדיד, ולכן f_n פונקציה מדידה כמכפלה של פונקציות מדידות. ברור ש $f_n \rightarrow f$ נקודתית. כמו כן, f_n היא סדרה עולה, ולכן ממשפט ההתכנסות המונוטונית $\int f_n dm \rightarrow \int f dm = \infty$. לכן, לכל M קיימת פונקציה בסדרה, נקרא לה g_M שמקיימת $\int g_M > M$. לבסוף נשים לב שכל הפונקציות בסדרה מקיימות $0 \leq f_n \leq f$, וכן, לכל n , $supp(f_n) \subseteq [-n, n]$ ובפרט ממידה סופית.

3. תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה כלשהי. הוכיחו/הפריכו:
 אם f^2 מדידה, אז f מדידה.
 הפרכה:

ניקח קבוצה לא מדידה A , ונגדיר $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ -1 & x \notin A \end{cases}$. $f(x)$ לא מדידה, משום ש $f^{-1}(0, \infty) = A$ לא מדידה. מאידך, $f^2 \equiv 1$ היא פונקציה מדידה.