פתרון תרגיל בית 4 – טופולוגיה

**שאלה 1**

1. הוכיחו את הטענה הבאה:  סגורה .
2. מצאו את נקודות ההצטברות של תת הקבוצות הבאות של המרחב המטרי :
3. ,
4. .

**פתרון**

סעיף א

: תהי , אזי קיימת סדרה  כך ש-. מתקיים ש- ומכיוון ש- היא קבוצה סגורה, היא מכילה את כל נקודות הגבול של הסדרות שמתכנסות שלה ולכן .

: נתון . נבחר סדרה מתכנסת ,  ונרצה להראות ש-. נניח בשלילה ש-. אבל אז  ומכאן . היות ו- נקבל  בסתירה להנחה. לכן  סגורה.

סעיף ב

1. מכיון שבין כל שני מספרים ממשיים נמצא מס' רציונלי נקבל שקבוצת נק' הצטברות של היא כל . שכן לכל  ולכל  קיים מספר רציונלי גדול מ- וקטן מ- .
2. נראה שאוסף נקודות ההצטברות של הוא הקבוצה . אמנם,לכל הסדרה  מוכלת ב ומתכנסת ל-. מהתבוננות בגבול הסדרות  ניתן להסיק שגם הנקודות  הינן נקודות הצטברות של . לבסוף, לכל כך ש או , **לא** נקודת הצטברות של . אכן, לא ניתן לבנות סדרה ב- שתתכנס ל- כזה. (ידוע מאינפי' שאם  ו- אזי ).

**שאלה 2**

יהי  מ"מ ותהי  תת קבוצה ו-. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

1.  (הפרש קבוצות).
2. קיים  כך ש-.
3. לכל סדרה, אם  אזי  קבועה לבסוף.

**פתרון**

א ב:. כלומר  אינה נקודת הצטברות של . מכאן קיים  כך ש-.  עפ"י הנתון וכמו כן. מכאן, . נניח בשלילה שקיים . נקבל ש . אך זוהי סתירה לכך ש . בסה"כ נקבל ש  כדרוש.

ב ג: תהי  ונניח ש . עפ"י סעיף ב' קיים  כך ש-. מהגדרת הגבול קיים  כך שלכל . מכיון ש- נקבל שלכל . מכאן לכל .

גא: נניח בשלילה ש-. כלומר  נקודת הצטברות של . מכאן, קימת סדרה  כך ש-. עפ"י הנתון בסעיף ג' קיים כך שלכל , בסתירה לכך ש-.

**שאלה 3**

הוכיחו או הפריכו: אם מ"מ שלם, ו- היא פונקציה רציפה, אזי תת מרחב שלם של .

**פתרון**

הפרכה. ניקח למשל  עם המטריקה הדיסקרטית, וניקח את  להיות פונקצית ההכלה. הוא שלם (מדוע?) וכן רציפה (כל פונקציה ממרחב מטרי דיסקרטי היא רציפה (מדוע?)). עם זאת, תת המרחב  אינו שלם. שימו לב שהמטריקה על  היא זו המושרית מהמטריקה הסטנדרטית האוקלידית של  וכידוע מאינפי' 1,  עם מטריקה זו אינו שלם.

**שאלה 4**

נסמן ב-את אוסף נקודות ההצטברות של ; נסמן ב- את אוסף נקודות ההצטברות של  וכן הלאה.

יהי  מ"מ, תהי  סדרה שכל איבריה שונים המתכנסת ל-כאשר.

1. מצאו את .
2. האם  קומפקטי?
3. האם  קומפקטי? נמקו את תשובתכם אך ורק באמצעות הגדרת הקומפקטיות דרך **כיסוים פתוחים**!

**פתרון**

1. טענה: . תחילה, ברור ש- (שכן יש סדרה מתוך  המתכנסת ל-). נראה ש-. נניח בשלילה שקיימת נקודה . נסמן . מתקיים . אכן, אם  אז  בסתירה להגדרת . מכיון ש- היא נקודת הצטברות, קיימת סדרה  שכל איבריה שונים המתכנסת ל-. כלומר, עבור ה- שהגדרנו קודם, קיים  כך שלכל  מתקיים . כעת, מכיון ש- קיים  כך שלכל  מתקיים . כלומר, פרט למספר סופי של איברים, כל איברי הקבוצה  נמצאים בסביבת  של . מכיון ש- אינסופית נסיק מהנ"ל שקיים איבר בחיתוך  בסתירה לכך ש-.
לגבי : מכיון ש- סופית, איך לה נקודות הצטברות ולכן .
2. כזכור, מרחב מטרי הוא קומפקטי אמ"מ לכל קבוצה אינסופית יש נקודת הצטברות. תת קבוצה אינסופית של המרחב , תת המרחב המטרי של , ללא נקודות הצטברות בתת המרחב המטרי  (למה?) לכן  אינו קומפקטי.
3.  קומפקטי. נוכיח באמצעות כיסויים. יהי  כיסוי פתוח של , ונראה שקיים לו תת כיסוי סופי. קיים  כך ש-. מכיוון ש- , קיים  כך שלכל  מתקיים . כעת, לכל  קיים  כך ש-. לכן תת הכיסוי הסופי הדרוש הוא .

**שאלה 5**

תהי  קבוצה. נתבונן באוסף  (כלומר כל תתי הקבוצות של  בעלות משלים אינסופי, יחד עם הקבוצה עצמה והמרחב כולו). הוכיחו/הפריכו:  מהווה טופולוגיה על .

**פתרון**

הפרכה: ניקח . מתקיים , ועם זאת .

[שימו לב שלא תמצאו הפרכה במקרה שבו  היא קבוצה סופית (מדוע?).]

**שאלה 6**

1. נתבונן ב-  ובתת קבוצה שלו . נאמר ש- היא קבוצה סגורה אם  כאשר:  היא תת קבוצה סגורה של בטופולוגיה האוקלידית, ו- היא תת קבוצה כלשהי של . הוכיחו שהמשלימים של הקבוצות הסגורות הללו יוצרים טופולוגיה על .

הדרכה: קודם כל, תוכיחו שזאת טופולוגיה ע"י כך שתראו את שלוש התכונות על קבוצות סגורות (ולא הפתוחות). שנית, כאשר תבדקו שחיתוך כלשהו של קבוצות סגורות הוא סגור, היעזרו בכך שמתקיים: .

1. נתבונן בקבוצת המספרים השלמים  ולכל  נגדיר . נסמן . הוכיחו:
2.  מרחב טופולוגי.
3.  אינו מטריזבילי.

**פתרון**

**סעיף א'**

נוכיח שזו טופולוגיה על ידי שנראה שמתקיימות 3 התכונות החלות על קבוצות סגורות.

1.  סגורה, שכן  (הקבוצה הריקה סגורה בטופולוגיה האוקלידית וכמובן).

 סגורה, שכן  ( סגור בטופולוגיה האוקלידית וכמובן).

1. איחוד סופי: יהיו  קבוצות סגורות, כלומר הן מהצורה  כאשר  סגורה ב- ו-  (עבור ). נתבונן באיחוד: . מתקיים  וכן  סגורה ב- כאיחוד סופי של סגורות.
2. חיתוך כלשהו: יהי  אוסף של קבוצות סגורות, כלומר  (כמקודם), ונראה שחיתוכן הוא קבוצה סגורה. נסמן .

קל לבדוק שמתקיים  (שימו לב ש- ). קודם כל,  סגורה ב- (כחיתוך של סגורות), שנית . הסבר להכלה: יהי  ולכן . אם  לכל  נקבל סתירה שכן  ולכן קיים  כך ש- ומכיוון ש- נקבל הדרוש.

**סעיף ב'**

תת סעיף 1

נוכיח שזו טופולוגיה:

1.  מההגדרה;
2. חיתוך: יהיו . אם אחת מהקבוצות היא ריקה אזי החיתוך ריק והטענה ברורה. אם אחת מהקבוצות היא המרחב כולו הטענה גם כן ברורה. אם כן, נניח ששתי הקבוצות שונות מהקבוצה הריקה ומהמרחב כולו. לכן קיימים  כך ש- . נניח בה"כ . מתקיים .
3. איחוד: יהי  אוסף של קבוצות פתוחות.נניח שהן כולן שונות מהמרחב כולו (אחרת הטענה ברורה). אם כולן ריקות גם כן הטענה ברורה. ניתן להניח בה"כ שלכל  עבור איזשהו .

 נתבונן באיחוד . אם קבוצת האינדקסים  אינה חסומה מלרע, אזי (למה?) וזו קבוצה פתוחה. אחרת,  חסומה מלרע וכתת קבוצה של המספרים השלמים יש לה מינימום. אזי  ולכן .

תת סעיף 2

המרחב אינו מטריזבילי, שכן הנקודון  (למשל) אינו סגור, שכן הקבוצה  אינה פתוחה.

**שאלה 7**

תזכורת:

תהי  קבוצה כלשהי, ותהי  ויהי . נגדיר .

1. הוכיחו ש- הוא מרחב טופולוגי.
2. נניח ש- . הוכיחו כי .
3. בתנאי סעיף ב', האם  מטריזבילי?

**פתרון**

1. נבדוק את התכונות.  שכן . שכן .
החיתוך: יהיו . אם  לא שייכת לאחת מהן, אזי לא שייכת לחיתוך וסיימנו. אחרת  שייכת לשתיהן ולכן . מתקיים  ולכן .

האיחוד: יהי  אוסף קבוצות פתוחות. אם  לא נמצאת באף אחת מהקבוצות, אזי היא לא נמצאת באיחוד וסיימנו. אחרת, קיים  כך ש-ולכן . מתקיים  ולכן .

1. ברור שמתקיים . נוכיח את ההכלה ההפוכה. נוכיח שכל נקודון הוא פתוח. עבור , אם  אזי  ולכן  פתוח. גם הנקודון  פתוח שכן .
2. כן, על ידי המטריקה הדיסקרטית.

**שאלה 8**

נתבונן בשני אוספים של תתי קבוצות של : , .

הוכיחו ש- הן טופולוגיות על .

**פתרון**

 היא פשוט הטופולוגיה הקו-סופית על  וכבר הוכחנו שזו טופולוגיה.

לגבי : נוכיח את התכונות לגבי קבוצות סגורות. הקבוצות הסגורות הן הסופיות ואלה ש-1 שייך אליהן.
ברור כי  סגרות לפי קריטריון זה.

לגבי האיחוד: תהיינה  שתי קבוצות סגורות, אזי: אם שתיהן סופיות אז האיחוד שלהן סופי וסיימנו. אחרת, אחת מהן אינסופית, נניח , מה שאומר ש- וכן .

לגבי החיתוך: תהיינה  קבוצות סגורות. אם  לכל  אזי  וסיימנו. אחרת קיים  כך ש- סופית, ומכיוון ש- נקבל הדרוש.