תרגיל בית 1 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1 (חימום)**.** תהי G חבורה עם איבר יחידה e. יהי $a \in G$ איבר. הוכיחו:

א. אם $aa = a$, אז $a = e$.

ב. אם יש $b \in G$ כך ש-$ab = e$, אז $b = a^{-1}$ ו-$ba = e$.

שאלה 2. תהי G חבורה עם איבר יחידה e, ויהי $a \in G$ איבר. נגדיר את פעולת החזקה לפי $a^1 := a$, ולכל $n > 1$ טבעי נגדיר $a^{n+1} := a^n \cdot a$. הוכיחו כי מתקיים:

א. $a^n a^m = a^{n+m}$ לכל $n, m \in \mathbb{N}$.

ב. $(a^n)^m = a^{nm}$ לכל $n, m \in \mathbb{N}$.

ג. נרחיב את ההגדרה לכל חזקה שלמה לפי $a^0 := e$ ו-$a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו כי לכל $a_1, \ldots, a_k \in G$ מתקיים $\left(a_1 \cdots a_k\right)^{-1} = a_k^{-1} \cdots a_1^{-1}$. הסיקו כי לכל $n \in \mathbb{Z}$ מתקיים $\left(a^n\right)^{-1} = \left(a^{-1}\right)^n$.

שאלה 3. תהי G חבורה. הוכיחו כי G אבלית אם ורק אם לכל $a, b \in G$ מתקיים כי $\left(ab\right)^2 = a^2 b^2$.

שאלה 4. בכל סעיף מופיעה קבוצה ופעולה כלשהי על הקבוצה.
עבור כמה שיותר סעיפים בדקו מי מבין האקסיומות של חבורה מתקיימות. כלומר יש לבדוק את סגירות הפעולה, קיבוציות הפעולה, קיום איבר יחידה, והאם כל איבר הוא הפיך. בנוסף בדקו האם הפעולה חילופית.

א. $(\{8, 9, 2, 1, 4\}, \max)$, קבוצה בת חמישה מספרים עם הפעולה של בחירת המקסימום.

ב. $\left(\{2^i \mid i \geq 0\}, \cdot\right)$, קבוצת החזקות (השלמות) האי שליליות של 2 עם פעולת הכפל הרגילה.

ג. $(2\mathbb{N}, *)$, המספרים הטבעיים הזוגיים עם הפעולה $a * b = a + b - 2$.

ד. $(P(\mathbb{Z}), \triangle)$, כאשר $P(\mathbb{Z})$ היא קבוצת החזקה של השלמים. הפעולה היא ההפרש הסימטרי המוגדר לכל $A, B \in P(\mathbb{Z})$ לפי $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

ה. הקבוצה הבאה ביחס לחיבור מטריצות

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$$

ו. $(A, \cdot)$, הקבוצה מן הסעיף הקודם ביחס לכפל מטריצות.

ז. $(\mathbb{Q}\cup\{\infty\}\,,\cdot)$, כאשר הקבוצה היא המספרים הרציונליים יחד עם איבר חדש המסומן ∞. הפעולה מוגדרת לפי $\infty\cdot x=x\cdot\infty=\infty$ לכל $x\neq 0$, $\infty\cdot 0=0\cdot\infty=1$ ואחרת זהו כפל רגיל של מספרים רציונליים.

ח. $(\mathbb{Q}\setminus\{-1\},*)$, המספרים הרציונלים בלי -1 עם הפעולה $a*b=a+b+ab$.

שאלה 5. תהינה $(G,*)$ ו-$(H,\bullet)$ חבורות. נגדיר על המכפלה הקרטזית $G\times H$ פעולה "רכיב-רכיב":

$$(g_1,h_1)(g_2,h_2)=(g_1*g_2,h_1\bullet h_2)$$

לכל $g_1,g_2\in G, h_1,h_2\in H$.

א. הוכיחו כי $G\times H$ עם הפעולה לעיל היא חבורה. היא נקראת המכפלה הישרה (החיצונית) של G ו-H.

ב. הוכיחו או הפריכו: החבורה $G\times H$ אבלית אם ורק אם G ו-H אבליות.

שאלה 6 (העשרה)**.** נתבונן במערכת האלגברית $(S,\cdot)$ שבה S היא קבוצה לא ריקה והפעולה $\cdot$ (המסומנת כמו כפל) היא סגורה וקיבוצית.

איבר $e\in S$ נקרא איבר יחידה מימין אם לכל $c\in S$ מתקיים $ce=c$. באופן דומה מגדירים איבר יחידה משמאל. כמובן שאיבר יחידה בחבורה הוא איבר יחידה משמאל ומימין לפי הגדרות אלו.

הוכיחו שאם ב-$(S,\cdot)$ לכל משוואה מן הצורה $ax=b$ או $xa=b$ יש פתרון במשתנה x, אז S היא חבורה.

בהצלחה!