adialugassy@gmail.com

לינארית 2 - תרגול 1

<u>תזכורת</u>: ראינו בסמס׳ הקודם כיצד למצוא דטר׳ לפי ההגדרה (בלי תמורות) ובעזרת פעולות שורה. נלמד דרך נוספת השיעור.

בנוסף ראינו גם <u>תכונות של דטר׳</u>:

1. $|A|=|A^t|$
2. $|A||B|=|AB|$
3. לא תמיד $|A|+|B|=|A+B|$ ✗
4. $|A^k|=|A|^k$ לכל k טבעי
5. עבור A הפיכה $|A^{-1}|=|A|^{-1}$
6. דטר׳ של מטריצה משולשית = מכפלת איברי האלכסון
7. A הפיכה $\Longleftrightarrow$ $|A|\neq 0$.

$$|A\cdot A^{-1}|=1$$
$$|A|\cdot|A^{-1}|=1$$
$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=|A|^{-1}$$

חישוב לפי מינורים/שיטת הקו-פקטורים

<u>הגדרה</u>: $M_{ij}=$ המטריצה בלי השורה ה-i ובלי העמודה ה-j ← המינור ה-ij של מטריצה A

<u>דוגמה</u>: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ אזי למשל

$$M_{12}=\begin{pmatrix}4&6\\7&9\end{pmatrix}$$
$$M_{23}=\begin{pmatrix}1&2\\7&8\end{pmatrix}$$

אפשר למצוא $|A|$ ע"י מינורים ע"י פיתוח לפי השורה ה-i:

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|M_{ij}|$$

A היא $n\times n$
<u>נשים</u> ♡ שורה i קבועה

ואפשר לפי העמודה ה-j:

$$|A|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|M_{ij}|$$ ← כאן j קבוע

<u>דוגמה</u>: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ נפתח לפי השורה ה-1

$$|A|=(-1)^{1+1}\cdot1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}}_{-3}+(-1)^{1+2}\cdot2\underbrace{\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix}}_{-6}+(-1)^{1+3}\cdot3\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}}_{-3}=0$$

A לא הפיכה!

נפתח שוב לפי העמודה השניה

$$|A| = (-1)^{1+2}\cdot 2\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}}_{-6} + (-1)^{2+2}\cdot 5 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}}_{-12} + (-1)^{2+3}\cdot 8 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}_{-6}$$

$$= 12 - 60 + 48 = 0$$

<u>תרגיל 4</u>: נניח $A,B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש- $|B|=-1$, $|A|=2$ מצא $|(AB^{-1})^t (BA)^{-2}| = ?$

<u>פתרון</u>:

$$|(AB^{-1})^t (BA)^{-2}| \underset{\text{לפי תכונה 2}}{=} |(AB^{-1})^t|\cdot|(BA)^{-2}| \underset{\substack{\text{לפי תכונה 1}\\ \text{לפי תכונה 4}}}{=} |AB^{-1}|\,|BA|^{-2}$$

(BA אכן הפיכה כי A,B הפיכות. אחרי הוכחה בשלילה, לכן הכלל עובד גם עם חזקה -2)

$$\underset{\text{לפי 2}}{=} |A||B^{-1}|\cdot(|B||A|)^{-2} \underset{\text{לפי 5}}{=} |A||B|^{-1}|B|^{-2}|A|^{-2} =$$

$$= 2\cdot(-1)^{-1}(-1)^{-2}\cdot 2^{-2} = -2\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

<u>תרגיל 5</u>: $B \in \mathbb{F}^{3\times 3}$, $|B| = -1$. מצא $|2B| = ?$

<u>פתרון</u>:

$$|2B| = |2I\cdot B| = \left|\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right|\cdot|B| = 2^3\cdot(-1)$$
$$= -8$$

[להסביר פרשין, אחרי שיודעים את שלושת המיורים, לא מרובה הפיכה ושלשים]

<u>adj(A)</u> - <u>המטריצה הנלווית/המצורפת/הצמודה הקלאסית</u>

<u>הגדרה</u>: תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$

$$(adj(A))_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ji}|$$

לא להתבלבל!

זה ji לא ij למרות שבאגף ij

בס"ד

דוגמא: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ נחשב את $\mathrm{adj}A$

$$\mathrm{adj}A=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&3\\8&9\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&3\\5&6\end{vmatrix}\\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\7&9\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&3\\4&6\end{vmatrix}\\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&2\\7&8\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3&6&-3\\6&-12&6\\-3&6&-3\end{pmatrix}$$

המשפט המרכזי:

$$\boxed{A(\mathrm{adj}A)=(\mathrm{adj}A)\cdot A=|A|\cdot I}$$

אם A הפיכה אז $\frac{A\,\mathrm{adj}A}{|A|}=I \Leftarrow A^{-1}=\frac{\mathrm{adj}A}{|A|}$

תרגיל: א) חשבו $|\mathrm{adj}A|$

ב) $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A)=?$

הניחו ש-A הפיכה
A $n\times n$

פתרון: א) לפי המשפט $A\,\mathrm{adj}A=|A|\cdot I$

נפעיל דטר' על שני האגפים:

$$|A\,\mathrm{adj}A|=\left|\begin{pmatrix}|A|&&\\&|A|&\\&&\ddots\;|A|\end{pmatrix}\right|$$

$$\rightarrow |A||\mathrm{adj}A|=|A|^n \Rightarrow |\mathrm{adj}A|=|A|^{n-1}$$

ב) נציב במשפט במקום A את $\mathrm{adj}A$ ונקבל

$$\mathrm{adj}A\cdot\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A)=\underbrace{|\mathrm{adj}A|}_{\text{לפי סעיף א}}\cdot I$$

$|A|^{n-1}$ כמו

המשך

$$\operatorname{adj} A \cdot \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = |A|^{n-1} \cdot I$$

$\Downarrow$ כי $\leftarrow$

$A \operatorname{adj} A = |A| \cdot I$

A הפיכה נתון $\Rightarrow \operatorname{adj} A = A^{-1} \cdot |A| I$

$$A^{-1} \cdot |A| \cdot I \cdot \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = \cancel{|A|^{n-1}}^{\,|A|^{n-2}} \cdot I \quad / \cdot A$$

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = A\,|A|^{n-2}$$

תרגיל: תהי $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$

נתון A הפיכה ב- $\mathbb{R}^{n\times n}$ (כלומר יש מטריצה A^{-1} עם איברים מ- $\mathbb{R}$ כך ש- $A^{-1}A = I$)

הוכח: A הפיכה גם ב- $\mathbb{Q}$

הוכחה:

אם A הפיכה ב- $\mathbb{R}$ אז קיימת A^{-1} והיא יחידה

כלומר לא ייתכן שקיימת ב- $\mathbb{Q}^{n\times n}$ A^{-1} אחרת. ולכן כל שצריך

ה- A^{-1} שב- $\mathbb{R}^{n\times n}$ היא עם איברים מ- $\mathbb{Q}$.

לפי המשפט משעור קודם כיוון ש- A הפיכה אז

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{|A|}$$

$|A| \in \mathbb{Q}$ כי כל האיברים של A הם ב- $\mathbb{Q}$ והרי הדט' הוא סכום סכומים של מכפלות של איברים מ- A.

$\operatorname{adj} A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ כי כל איבר הוא בצורה $(-1)^{i+j}|M_{ij}|$ כלומר דט' של מטריצה עם איברים מ- $\mathbb{Q}$ וכמו קודם גם הם ב- $\mathbb{Q}$.

לכן סה"כ $A^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj} A}{|A|} \in \mathbb{Q}^{n\times n}$

משפט

קרמר

A הפיכ' $\quad A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$x_i = \frac{|A_i(b)|}{|A|} \leftarrow$$ מחליף עמודה i ב-b

כלל קרמר

תהי $Ax=b$ מערכת משוואות, כך ש- A הפיכה

אז כיון ש- A הפיכה יש פתרון יחיד וכלל קרמר יעזור לנו למצוא אותו.

סימון: $A_i(b)=$ המטריצה המתקבלת מהחלפת עמודה i של A בווקטור b

כלל קרמר: $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$, A הפיכה

אזי:

$$x_i=\frac{|A_i(b)|}{|A|}$$

דוגמא: פתור באמצעות כלל קרמר $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$

אכן ניתן להשתמש בכלל קרמר כי $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ הפיכה (כי הדט' שלה $\neq 0$)

ונקבל

$$x_1=\frac{|A_1\binom{5}{6}|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}5&2\\6&4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}}=\frac{8}{-2}=-4$$

$$x_2=\frac{|A_2\binom{5}{6}|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1&5\\3&6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}}=\frac{-9}{-2}=4.5$$

$$\Leftarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\4.5\end{pmatrix}$$