

תרגיל 3

1. קבעו אילו מהמטריקות הבאות שקולות על \mathbb{Z} :

(א) d_5 .

(ב) d_7 .

(ג) מטריקה $0 - 1$ כלומר

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

(ד) והמטריקה המושרית מהמטריקה הסטנדרטית על \mathbb{R} (כלומר $d(x, y) = |x - y|$).

2. יהי (X, d) מרחב מטרי. נגדיר $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$ לפי

$$\rho(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

(א) הוכיחו כי ρ היא מטריקה.

(ב) הוכיחו כי ρ ו d שקולות.

(ג) הסיקו שכל מטריקה שקולה למטריקה חסומה.

3. כזכור, הוכחנו בתרגול שעל המרחב l_1 של הסדרות הממשיות (x_i) כך ש $\sum |x_i| < \infty$, המטריקה d_1 ומטריקת הסופרימום אינן שקולות. כמו כן, הוכחתם בהרצאה שמטריקות הן שקולות אמ"ם הן מגדירות את אותן קבוצות פתוחות. זה מוביל אותנו לתרגיל הבא: מצאו קבוצה פתוחה ב (l_1, d_1) שאינה פתוחה ב (l_1, d_∞) .

4. א. יהי X מרחב מטרי שלם, ו $A \subseteq X$ תת מרחב. הוכיחו שאם A סגורה ב X , אז A מרחב מטרי שלם.

ב. הראו שאם X אינו שלם, אז הטענה אינה בהכרח נכונה (כלומר, יתכן ש A סגורה ב X , אבל A לא מרחב שלם).

ג. יהי X מרחב מטרי כלשהו, ו $A \subseteq X$ תת מרחב מטרי שלם. הוכיחו ש A סגורה ב X .

ד. יהי X מרחב מטרי שלם, ו $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הוכיחו/הפריכו: $f[X]$ תת מרחב שלם של \mathbb{R} .

5. יהי (X, d) מרחב מטרי. נגדיר את הקוטור של תת-קבוצה $A \subseteq X$ על ידי:

$$\text{diam}(A) = \sup \{d(x, y) \mid x, y \in A\}$$

הוכיחו שמרחב מטרי הוא שלם אם ורק אם לכל סדרה יורדת של קבוצות סגורות לא ריקות $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ מתקיים $\text{diam}(F_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
 .. $\subseteq F_{n+1} \subseteq F_n \subseteq \dots \subseteq X$
 זהו הקריטריון של קנטור לשלמות.

6. נתבונן במרחב $C[0, 1]$, מרחב כל הפונקציות הרציפות $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ עם מטריקת המקסימום.

(א) תהי $a \in [0, 1]$. נגדיר פונקציה $F_a : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי: $F_a(f) = f(a)$.
 הוכיחו שזו פונקציה רציפה.

(ב) הוכיחו שהקבוצה $\{f \in C[0, 1] : f(\frac{1}{3}) < 19\}$ פתוחה ב- $C[0, 1]$.

7. יהי (X, d) מרחב מטרי, $a \in X, A \subseteq X$. הוכיחו שהפונקציות הבאות רציפות:

$$f_a(x) = d(x, a) \quad (\text{א})$$

$$f_A(x) = d(x, A) \quad (\text{ב})$$

8. יהי (X, d) מרחב מטרי $a \in X$. הוכיחו שהקבוצה הבאה: $S[a, r] = \{x \in X : d(x, a) = r\}$ סגורה.