

## תרגיל בנושא צורת ז'ורדן

**תרגיל.** תהי  $A \in \mathbb{C}^{14 \times 14}$  עם ע"ע יחיד  $\lambda$ .  
נתון כי:

$$\text{rank}(A - \lambda I) = 7$$

$$\text{rank}(A - \lambda I)^2 = 2$$

$$\text{rank}(A - \lambda I)^3 = 0$$

מצאו את צורת ז'ורדן של  $A$ .

פתרון.

אם  $J$  בלוק ז'ורדן מסדר  $d \times d$  המתאים לע"ע  $\lambda$ , אז:  
 $J - \lambda I$  היא מטריצת אפסים עם אלכסון אחדים מממש מעל האלכסון הראשי,  $(J - \lambda I)^2$  היא מטריצה עם אלכסון אחדים במרחק 2 מעל האלכסון הראשי, וכו'. לכן  $\text{rank}(J - \lambda I) = d - 1$  ובאופן כללי:  
 $\text{rank}(J - \lambda I)^k = d - k$  הוא  $d - k$  עבור  $k \leq d$ , והוא כמובן 0 עבור  $k > d$ . לכן ההפרש  $\text{rank}(J - \lambda I)^{k-1} - \text{rank}(J - \lambda I)^k$  הוא 1 עבור  $k \leq d$ , והוא 0 אחרת.  
 מסקנה: אם  $A$  היא מטריצה שלשה (כלומר בעלת צורת ז'ורדן) אז, לכל ע"ע  $\lambda$ ,

$$\text{rank}(A - \lambda I)^{k-1} - \text{rank}(A - \lambda I)^k$$

הוא מספר בלוקי ז'ורדן של  $A$  המתאימים ל- $\lambda$  וגודלם לפחות  $d \times d$  עבור  $d \geq k$ .  
 בתרגיל שלנו:

•  $\text{rank}(A - \lambda I)^0 - \text{rank}(A - \lambda I)^1 = 7$ , ולכן יש 7 בלוקים שגודלם לפחות 1 (אלו כל הבלוקים).

•  $\text{rank}(A - \lambda I)^1 - \text{rank}(A - \lambda I)^2 = 5$ , ולכן יש 5 בלוקים שגודלם לפחות 2.

•  $\text{rank}(A - \lambda I)^2 - \text{rank}(A - \lambda I)^3 = 2$ , ולכן יש 2 בלוקים שגודלם לפחות 3.

•  $\text{rank}(A - \lambda I)^3 = 0$ , ולכן אין בלוקים שגודלם יותר מ-3.

בסה"כ: יש 2 בלוקים בגודל 3,  $5 - 2 = 3$  בלוקים בגודל 2, וכן  $7 - 5 = 2$  בלוקים בגודל 1.  
 ולכן

$$J(A) = J_3(\lambda) \oplus J_3(\lambda) \oplus J_2(\lambda) \oplus J_2(\lambda) \oplus J_2(\lambda) \oplus J_1(\lambda) \oplus J_1(\lambda)$$