פתרון תרגיל בית 6 – טופולוגיה

**שאלה 1**

קבעו לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות אם היא פתוחה/ סגורה/ רציפה:

1.  המוגדרת ע"י .
2.  המוגדרת ע"י .
3.  עבור  המוגדרת ע"י .

**פתרון**

1. הפונקציה לא רציפה שכן אינה רציפה ב-0. ניתן להוכיח למשל עפ"י היינה  אבל .

הפונקציה אינה פתוחה כי למשל  פתוחה ב אבל  שאינה פתוחה ב.

הפונקציה אינה סגורה כי למשל  סגורה ב אבל  ו-  אינה סגורה ב.

1. הפונקציה לא רציפה. ניתן להוכיח זאת למשל ע"י כך ש סגורה ב  אבל  אינה סגורה ב.

הפונקציה אינה פתוחה: פתוחה ב אבל  שאינה פתוחה ב.

הפונקציה סגורה: לכל  (ובפרט עבור  סגורה)  סגורה. אמנם, אם נקבל . אם  נקבל . אם נקבל ובכל מקרה אחר נקבל .

1. הפונקציה רציפה שכן היא מוגדרת באמצעות שתי הפונקציות הבאות:,. שתי הפונקציות רציפות ( פונקציה קבועה ו- פונקציית ההכלה).  כיסוי פתוח ל  (למעשה  וכן  אפילו סגוחות ב (בדקו!)). . לכן מתקיימים תנאי המשפט שמבטיח רציפות של .

הפונקציה לא פתוחה ולא סגורה שכן  סגוחה ב- אבל  לא פתוחה ולא סגורה ב-.

**שאלה 2**

יהיה  מ"ט.  תת מרחב, אזי  סגורה ב-   קיימת  סגורה ב- כך ש- .

**פתרון**

 קיימת  סגורה ב- כך ש- , צריך להוכיח שְ-  סגורה בְּ- . נשים לב שמתקיים: .  הינה קבוצה פתוחה ב-  ולכן לפי הגדרת תת מרחב טופולוגי  פתוחה ב- . מכאן נובע שְ-  פתוחה ב-  ולכן  סגורה ב- .

 נתון כי  סגורה ב- , נבנה  סגורה ב- כך ש- .   
היות וְ-  סגורה, המשלים שלה בְּ-  פתוח, ולכן קיימת  פתוחה ב-  כך שְ- . מכאן,   . מצד שני, נשים לב כי . לכן, בסה"כ, . נבחר  ונקבל את הדרוש.

**שאלה 3**

הוכיחו:

1. כל פונקציה ממרחב טופולוגי דיסקרטי לכל מרחב טופולוגי אחר – הינה רציפה.
2. כל פונקציה ממרחב טופולוגי כלשהו למרחב הטופולוגי הטריוויאלי –

הינה רציפה.

1. תהי  רציפה. נניח כי  וגם . הוכיחו כי  וגם  רציפות.

**פתרון**

1. תהי  פונקציה ממרחב טופולוגי דיסקרטי למרחב טופולוגי כלשהו. במ"ט דיסקרטי כל קבוצה היא פתוחה, ולכן  פתוחה, גם  פתוחה. ומהגדרת הרציפות נובע כי  רציפה.
2. תהי . נוכיח שהיא רציפה. כזכור, בטופולוגיה הטריוויאלית יש רק שתי קבוצות פתוחות: הקבוצה הריקה והמרחב עצמו. לכן עלינו לבדוק רק שתי תמונות הפוכות.   
    ואלה הן שתי קבוצות פתוחות במרחב המקור. לכן (לפי ההגדרה)  רציפה.
3.  רציפה. לכן לכל  מתקיים . אבל, , ולכן לכל  מתקיים . מהגדרת הרציפות נובע שְ-  רציפה.   
   כמו כן, אם  רציפה, לכל  מתקיים , היות וְ- . לכן  רציפה גם כן.

**שאלה 4**

תהי  פונקציה בין שני מרחבים טופולוגיים. ניתן לראות את  כתת מרחב טופולוגי של .

1. הוכיחו שאם  פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- ל- אזי היא פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- ל-.
2. הראו ע"י שתי דוגמאות נגדיות שמהעובדה ש- פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- ל-לא נובע ש-  פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- ל-.

**פתרון**

1. תהי  .
   1. נניח ש  פתוחה ונוכיח ש  פתוחה. תהי  פתוחה ב-. מההנחה מתקיים  פתוחה ב. מתקיים  ולכן . מכיון ש פתוחה ב וכן  נקבל עפ"י הגדרת טופולוגית תת מרחב ש  פתוחה ב.
   2. ההוכחה של המקרה שבן נתון ש  סגורה וצ"ל ש סגורה, דומה מאד להוכחה של סעיף א. רק בשלב הסופי יש להיעזר בתרגיל בית שמדבר על אפיון קבוצה סגורה בטופולוגית תת מרחב.
2. דוגמה נגדית לעובדה שמכך ש-  פתוחה לא נובע ש-  פתוחה .

יהיו  ו העתקת ההכלה. כלומר . ברור ש  והפונקציה  פתוחה שכן היא למעשה פונקצית הזהות מ על . אבל,  אינה פתוחה כי למשל  פתוחה ב  אבל  אינה פתוחה ב.

1. דוגמה נגדית שניה:  סגורה ו-  אינה סגורה.

יהיו  ו- העתקת ההכלה כלומר . ברור ש  והפונקציה  סגורה שכן היא למעשה פונקצית הזהות מ על . מצד שני  אינה סגורה כי למשל  סגורה ב  אבל  אינה סגורה ב.

הערה: דוגמה נגדית 2 היתה יכולה לשמש גם כדוגמה נגדית לסעיף 1) שכן הפונקציה  היא גם פתוחה והפונקציה  אינה פתוחה כי  פתוחה ב  אבל  אינה פתוחה ב.

**שאלה 5**

יהיו  שני מספרים נתונים. נגדיר תת מרחב של : . הוכיחו ש- הומיאומורפי ל-.

**פתרון**

תהי  פונקציית ההטלה על הרכיב הראשון. היא הפיכה שכן המוגדרת ע"י  היא ההופכית שלה. אכן, .  רציפה שכן היא מתקבלת מצמצום התחום ל  של פונקציית ההטלה הרציפה (הוכחנו בעבר) . נוכיח ש- רציפה ונסיק ש-  הומיאומורפיזם.

נראה רציפות של  בנקודה שרירותית . יהי  נבחר . אזי  ולכל  המקיים  מתקיים 

**שאלה 6**

יהי  מרחב נורמי,  .הוכיחו שהפונקציות הבאות רציפות:

1. העתקת הנורמה-  המוגדרת ע"י  (שני המרחבים הם מרחבים מטריים).
2. הזזה-  המוגדרת ע"י .
3. כפל בסקלר-  המוגדרת ע"י .
4. הסיקו כי כל כדור פתוח  () הומיאומורפי ל-.

**פתרון**

1. נראה רציפות בנקודה שרירותית . יהי. נבחר  ונקבל שלכל  המקיימת  מתקיים . נוכיח את אי השוויון  עפ"י אי שוויון המשולש של הנורמה  ניתן להוכיח בצורה דומה  ולכן בסה"כ .
2. נראה רציפות בנקודה שרירותית . יהי. נבחר  ונקבל שלכל  המקיימת  מתקיים .
3. אם  נקבל העתקה קבועה . (העתקת האפס) והיא רציפה . עבור  נוכיח רציפות בנקודה שרירותית . עבור ניתן לקחת  ולקבל הדרוש.
4. תהי  העתקה המוגדרת ע"י  (קל לבדוק שאכן התמונה מוכלת בכדור היחידה) זו העתקה רציפה עפ"י סעיפים 2,3 (הזזה בווקטור  וכפל בסקלר ) ו-  ההופכית של  היא הפונקציה  שמוגדרת אף היא באמצעות כפל בסקלר והזזה ולכן רציפה אף היא עפ"י הסעיפים הקודמים. מכאן ש  ו- הומיאומורפיים.