מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 4

תזכורת: (היה בתרגול)

הגדרה. יהי M מרחב מטרי ויהי $\varepsilon > 0$. תת-קבוצה $A \subseteq M$ נקראת *ε–רשת* ב- M אם לכל $x \in M$ קיימת נקודה $a \in A$ כך ש- $d(x,a) < \varepsilon$,
או בצורה אחרת, $M = \cup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$.
הגדרה. מרחב מטרי M נקרא *חסום לחלוטין* אם לכל $\varepsilon > 0$ ב-M קיימת ε–רשת סופית, כלומר קיימום נקודות $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ כך ש- $M = \cup_{k=1}^{n} B(a_k, \varepsilon)$.

1. יהי M מרחב מטרי קומפקטי.

א') להוכיח ש- M מרחב מטרי שלם. (הערה. עשינו את זה בשיעור אבל כדאי לחשוב ולרשום באופן מפורט.)
ב') להוכיח ש- M מרחב מטרי חסום לחלוטין.

2. הגדרה. יהו X, Y מרחבים מטריים. פונקציה $f: X \to Y$ *רציפה במידה שווה* אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x_1, x_2 \in X$ מתקיים:
$$d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$
להוכיח:
א') במרחב מטרי כל פונקציה רציפה במידה שווה היא רציפה.
ב') אם X, Y מרחבים מטריים, X קומפקטי ופונקציה $f: X \to Y$ רציפה אז היא רציפה במידה שווה. (רמז: ולהשתמש במוסג "מספר לבג של כיסוי")

3. יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים ו- f פונקציה: $f: X \to Y$.
להוכיח: f פונקציה רציפה אם ורק אם היא רציפה בכל נקודה $p \in X$.

4. יהי X מרחב טופולוגי.

א') יהיו A, B תת-מרכבים של X כך ש- $A \subseteq B \subseteq X$. להוכיח שלהשרות טופולוגיה ישירות מ-X ל-A או קודם להשרות טופולוגיה מ-X ל-B ולאחר מכן מ-B ל-A - זה אותו דבר.
ב') להראות שאם $X \subseteq A \subseteq F$ ו-F סגורה ב-X, אז F סגורה ב-A.
ג') להראות שאם $X \subseteq A \subseteq F$ ו-F סגורה ב- A ו-A סגורה ב- X אז F סגורה ב-X.

5. יהיו τ_1, τ_2 שתי טופולוגיות בקבוצה X כך ש-$\tau_1 \subseteq \tau_2$
ו- σ_1, σ_2 שתי טופולוגיות בקבוצה Y כך ש-$\sigma_1 \supseteq \sigma_2$. להוכיח שאם פונקציה
$f: (X, \tau_1) \to (Y, \sigma_1)$ רציפה אז גם פונקציה $f: (X, \tau_2) \to (Y, \sigma_2)$ רציפה.
(<u>הערה.</u> זאת אותה פונקציה $f: X \to Y$ אבל הסימון כמו $f: (X, \tau_1) \to (Y, \sigma_1)$
מדגיש שרציפות של כל פונקציה תלויה בטופולוגיות של התחום והטווח שלה.)

6. האם קיים הומאומורפיזם בין המרחבים טופולוגיים $[0, \infty)$ ו-$(0,1]$ (עם תופולוגיות
המושרות מהטופולוגיה הרגילה של $\mathbb{R}$) ? אם כן - לתת דוגמה להומאומורפיזם.