תרגיל 3

1. קבעו אילו מהמטריקות הבאות שקולות על $\mathbb{Z}$?

   (א) d_5.

   (ב) d_7.

   (ג) מטריקה $0-1$ כלומר

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$$

   (ד) והמטריקה המושרית מהמטריקה הסטנדרטית על $\mathbb{R}$ (כלומר $d(x,y)=|x-y|$).

פתרון. לפי d_5 הסדרה 5^n מתכנסת ל 0 אבל זה לא נכון לפי שאר המטריקות ולכן d_5 לא שקולה לאחרות. כנ״ל d_7. שתי המטריקות האחרונות דווקא כן שקולות. במטריקה $0-1$ כל נקודה היא קבוצה פתוחה (כי היא כדור ברדיוס חצי סביב הנקודה) ולכן כל קבוצה היא פתוחה (בתור איחוד פתוחות). בדומה גם לפי המטריקה הסטנדרטית, לכל $n\in\mathbb{Z}$ הקבוצה $\{n\}$ היא קבוצה פתוחה כי היא הכדור הפתוח

$$B(n,\frac{1}{2})$$

ולכן כל קבוצה היא פתוחה כאיחוד של פתוחות.

2. נגדיר את S להיות קבוצת הסדרות הממשיות שהטור שלהן מתכנס בהחלט, כלומר

$$S=\{a_n \mid \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty\}$$

נגדיר על קבוצה זו שתי מטריקות:

$$d(a_n,b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n-b_n|$$

$$\rho(a_n,b_n)=\sup\{|a_n-b_n| \mid n\in\mathbb{N}\}$$

האם המטריקות שקולות? הוכיחו.

פתרון. לא. ניקח את הסדרה

$$a_1 = (1, 0, 0, \ldots)$$

$$a_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots)$$

$$a_3 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \ldots)$$

ובאופן כללי

$$a_n = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots)$$

קל לראות שלפי מטריקה ρ מתקיים $a_n \to 0$ אבל לפי מטריקה d דווקא $d(a_n, 0) = 1$ לכל n. לכן המטריקות לא שקולות

3. יהי (X, d) מרחב מטרי. נגדיר $\rho : X \to \mathbb{R}$ לפי

$$\rho(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

(א) הוכיחו כי ρ היא מטריקה.

פתרון. קל לוודא ש $\rho(x, y) = 0$ אם ורק אם $x = y$ וקל לוודא סימטריות. לגבי אי שוויון המשולש. צריך להוכיח

$$\min\{1, d(x, z)\} \leq \min\{1, d(x, y)\} + \min\{1, d(y, z)\}$$

נפצל לכמה מקרים

אפשרות א':

$$\min\{1, d(x, z)\} = 1$$

ואז אם בצד ימין אחד המינימומים הוא 1 אז האי שוויון מיידי. אחרת

$$1 \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

כנדרש.

אפשרות ב':

$$\min\{1, d(x, z)\} = d(x, z)$$

כלומר

$$d(x, z) \leq 1$$

שוב אם בצד ימין אחד המינימומים הוא 1 אז האי שוויון מיידי. אחרת זה פשוט אי שוויון המשולש.

(ב) הוכיחו כי ρ ו d שקולות.

פתרון. נוכיח לפי התכנסות סדרות. נניח ש $x_n \to x$ לפי d כלומר $d(x_n, x) \to 0$.
אז בוודאי החל משלב מסוים

$$d(x_n, x) \leq 1$$

ולכן

$$\rho(x_n, x) = \min\{1, d(x_n, x)\} \to 0$$

מצד שני אם $x_n \to x$ לפי ρ, כלומר

$$\min\{1, d(x_n, x)\} \to 0$$

אז בהכרח מתקיים שהחל משלב מסוים

$$\min\{1, d(x_n, x)\} \leq \frac{1}{2}$$

ולכן

$$d(x_n, x) \leq 1$$

כלומר החל משלב מסוים

$$d(x_n, x) = \rho(x_n, x)$$

ולכן

$$d(x_n, x) \to 0$$

(ג) הסיקו שכל מטריקה שקולה למטריקה חסומה.

פתרון. ρ אכן חסומה על ידי 1

4. כזכור, הוכחנו בתרגול שעל המרחב l_1 של הסדרות הממשיות (x_i) כך ש$\sum |x_i| < \infty$, המטריקה d_1 ומטריקת הסופרימום אינן שקולות. כמו כן, הוכחתם בהרצאה שמטריקות הן שקולות אמ"ם הן מגדירות את אותן קבוצות פתוחות. זה מוביל אותנו לתרגיל הבא:
מצאו קבוצה פתוחה ב(l_1, d_1) שאינה פתוחה ב(l_1, d_∞).
פתרון:

נסתכל על הכדור $B_{d_1}(0, r)$ שמרכזו בסדרה שכולה אפסים. ברור שהוא פתוח במטריקה d_1 . מי שנמצא בו זה בעצם כל הסדרות שסכום הטור של הערכים המוחלטים שלהן קטן מr. אם זאת הייתה קבוצה פתוחה בl_∞, אז לכל איבר בקבוצה, ובפרט ל0, היה כדור פתוח בd_∞ סביבו שמוכל בקבוצה. כלומר, היה $\epsilon > 0$ כך ש$B_{d_\infty}(0, \epsilon) \subseteq B_{d_1}(0, r)$. נשים לב ש$B(0, \epsilon)$ זאת הקבוצה של כל הסדרות שהסופרימום שלהן קטן מϵ. קיים n טבעי כך ש$n\epsilon > r$. אז אם נקח את הסדרה $(\epsilon, \epsilon, \epsilon, ..., \epsilon, 0...)$ של n פעמים ϵ, היא נמצאת ב$B_{d_\infty}(0, \epsilon)$ אבל לא ב$B_{d_1}(0, r)$, ולכן $B_{d_\infty}(0, \epsilon) \not\subseteq B_{d_1}(0, r)$. מסקנה: $B_{d_1}(0, \epsilon)$ לא פתוחה בd_∞.

5. א. יהי X מרחב מטרי שלם, ו$A\subseteq X$ תת מרחב. הוכיחו שאם A סגורה בX, אז A מרחב מטרי שלם.

ב. הראו שאם X אינו שלם, אז הטענה אינה בהכרח נכונה (כלומר, יתכן ש A סגורה בX, אבל A לא מרחב שלם).

ג. יהי X מרחב מטרי כלשהו, ו$A\subseteq X$ תת מרחב מטרי שלם. הוכיחו שA סגורה בX.

ד. יהי X מרחב מטרי שלם, ו$f:X\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הוכיחו/הפריכו: $f[X]$ תת מרחב שלם של $\mathbb{R}$.

פתרון:

א. תהי $\{x_n\}\subseteq A$ סדרת קושי. בפרט, היא סדרת קושי בX . מכיוון שX מרחב שלם, יש לה גבול. כלומר, יש $x\in X$ כך ש $x_n\to x$. לפי ההגדרה השקולה של קבוצה סגורה, נקבל ש $x\in A$. כלומר, $\{x_n\}$ מתכנסת בA.

ב. נקח $A=X$. אז A סגורה בX, אבל היא לא מרחב שלם.

ג. נניח בשלילה שA לא סגורה בX. מההגדרה השקולה לסגירות, זה אומר שיש סדרה $\{x_n\}\subseteq A$ כך ש $x_n\to x$, אבל $x\notin A$. $\{x_n\}$ סדרה מתכנסת בX, ולכן היא סדרת קושי. נוכיח שאינה מתכנסת בA: אם קיים $a\in A$ כך ש $x_n\to a$, אז נכון גם במרחב X. מיחידות הגבול נקבל ש $x=a$, וזאת סתירה לכך ש $x\notin A$. לכן $\{x_n\}$ לא מתכנסת בA. כלומר, A לא מרחב שלם.

ד. הפרכה:

נקח $X=(0,1)$ עם המטריקה הדיסקרטית (מטריקת 0-1). ונגדיר את פונקציית ההכלה $f:X\to\mathbb{R}$ (כל איבר נשלח לעצמו). זוהי פונקציה רציפה (טענת עזר: הוכיחו שכל פונקציה מתוך מרחב דיסקרטי היא רציפה). כעת, X הוא מרחב שלם (הוכחנו בכיתה שכל מרחב דיסקרטי הוא שלם), אבל $(0,1)$ כתת מרחב של $\mathbb{R}$ (כלומר, עם המטריקה המושרית מ$\mathbb{R}$) הוא לא מרחב שלם. (לפי סעיף ג', כי הוא לא קבוצה סגורה.)

6. יהי (X,d) מרחב מטרי. נגדיר את **הקוטר** של תת-קבוצה $A\subseteq X$ על ידי:

$$diam\left(A\right)=\sup\left\{d\left(x,y\right)|x,y\in A\right\}$$

הוכיחו שמרחב מטרי הוא שלם אם ורק אם לכל סדרה יורדת של קבוצות סגורות לא ריקות $X\supseteq\cdots\supseteq F_n\supseteq F_{n+1}\supseteq\cdots$ המקיימת $diam\left(F_n\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ מתקיים $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\emptyset$.

זהו הקריטריון של קנטור לשלמות.

פתרון:

(א) נניח שהמרחב לא שלם. לכן, קיימת סדרת קושי לא מתכנסת, $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$. נגדיר: $F_n=\{x_m\}_{m=n}^{\infty}$, זנב הסדרה החל מהאיבר ה$-n$.

למה אלו קבוצות סגורות? אלו סדרות קושי לא מתכנסות. סדרה כזו היא קבוצה סגורה, מכיוון שאם הייתה לה נקודת הצטברות אז היא הייתה גבול חלקי של הסדרה ולכן זה היה הגבול של הסדרה עצמה והסדרה הייתה מתכנסת וסתירה! לכן אין נקודות הצטברות והקבוצה סגורה (שהרי היא מכילה את כל נקודות ההצטברות שלה).

מכיוון שהסדרה היא סדרת קושי, לכל $0<\varepsilon$ קיים n_0 כך שלכל $n,m>n_0$ מתקיים $d\left(x_n,x_m\right)<\varepsilon$. כלומר, כל שני איברים ב$-F_{n_0}$ קרובים אחד לשני עד כדי ε ולכן $diam\left(F_{n_0}\right)\leq\varepsilon$. בפרט, $diam\left(F_{n_0}\right)\longrightarrow0$, אך $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x_m\}_{m=n}^{\infty}=\emptyset$.

לצד השני, אם המרחב שלם, נבחר סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$x_n \in F_n$. לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 עבורו $diam\left(F_{n_0}\right) < \varepsilon$ ובפרט לכל $m, n > n_0$ מתקיים $x_n, x_m \in F_{n_0}$ ולכן:

$$d\left(x_n, x_m\right) \leq diam\left(F_{n_0}\right) < \varepsilon$$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ולכן מתכנסת לגבול x, כי המרחב שלם. בנוסף, לכל n מתקיים: $\{x_m\}_{m=n}^{\infty} \subseteq F_n$ ולכן הגבול x שייך ל-F_n.
לכן, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ ואם כך $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

7. נתבונן במרחב $C\left[0,1\right]$, מרחב כל הפונקציות הרציפות $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ עם מטריקת המקסימום.

(א) תהי $a \in [0,1]$. נגדיר פונקציה $F_a : C\left[0,1\right] \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי: $F_a\left(f\right) = f\left(a\right)$. הוכיחו שזו פונקציה רציפה.

(ב) הוכיחו שהקבוצה $\left\{f \in C\left[0,1\right] : f\left(\frac{1}{3}\right) < 19\right\}$ פתוחה ב-$C\left[0,1\right]$.

פתרון:

i. נראה בסעיף הראשון שרציפות מתקיימת ונשתמש בכך בסעיף השני.

א׳. תהי $\{f_n\} \subseteq C\left[0,1\right]$ סדרת פונקציות המתכנסת ל-$f \in C\left[0,1\right]$. נראה ש-$F_a\left(f_n\right) \longrightarrow F_a\left(f\right)$ ונסיק מכך ש-F_a אכן רציפה.
$F_a\left(f_n\right) \longrightarrow F_a\left(f\right)$ פירושו $f_n\left(a\right) \longrightarrow f\left(a\right)$ לפי הגדרת F_a. מתקיים:

$$0 \leq \left|f_n\left(a\right) - f\left(a\right)\right| \leq \max_{x \in [0,1]}\left\{f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right\} = d\left(f_n, f\right)$$

ומכיוון ש-$f_n \longrightarrow f$, $d\left(f_n, f\right) \longrightarrow 0$ ולכן לפי סנדוויץ׳, $f_n\left(a\right) \longrightarrow f\left(a\right)$ ולכן F_a רציפה.

ב׳. שימו לב שקצת קשה לתפוס אינטואיטיבית איך אמורה להיראות קבוצה פתוחה של פונקציות, אבל בעזרת הרציפות החיים קלים:

$$\left\{f \in C\left[0,1\right] : f\left(\frac{1}{3}\right) < 19\right\} = \left\{f \in C\left[0,1\right] : F_{\frac{1}{3}}\left(f\right) < 19\right\} = F_{\frac{1}{3}}^{-1}\left(\left(-\infty, 19\right)\right)$$

ומכיוון ש-$\left(-\infty, 19\right)$ פתוחה ב-$\mathbb{R}$ ו-$F_{\frac{1}{3}}$ רציפה, גם הקבוצה שלנו פתוחה.

8. יהי (X,d) מרחב מטרי, $A \subseteq X$, $a \in X$. הוכיחו שהפונקציות הבאות רציפות:

(א) $f_a(x) = d(x,a)$

(ב) $f_A(x) = d(x,A)$

פתרון:

i. נוכיח שזאת פונקציית ליפשיץ עם $k = 1$, ולכן רציפה. יהיו $x, y \in X$.
$d(f_a(x), f_a(y)) = |f_a(x) - f_a(y)| = |d(x,a) - d(y,a)| \leq d(x,y)$.
המעבר האחרון נובע משאלה מס׳ 1 בתרגיל בית 1.

ii. ההוכחה זהה, בזכות סעיף ג׳ של שאלה 1 בתקגיל בית 1.

9. יהי (X,d) מ"מ ו-$a \in X$. הוכיחו שהקבוצה הבאה: $S[a,r] = \{x \in X : d(x,a) = r\}$ סגורה.

פתרון:

$S[a,r] = f_a^{-1}\{1\}$ כאשר $f_a(x) = d(a,x)$ היא פונקציה רציפה (מהתרגיל הקודם). כלומר, זה המקור של קבוצה סגורה (כל קבוצה סופית היא סגורה) תחת פונקציה רציפה. ולכן זאת קבוצה סגורה.