1. הוכיחו/הפריכו: יהיו A, B מטריצות לכסינות אזי AB מטריצה לכסינה.
פתרון: המטריצות
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
לכסינות כי הם משולשיות ולכן הע"ע על האלכסון והע"ע של שתיהן הם $\{0,1\}$ ומכיוון שיש להם 2 ע"ע, שונים (ומהם מגודל 2×2) הם לכסינות. אבל
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
מטריצה לא לכסינה כי הפ"א הוא x^2 (AB גם משולשית) ואם היא היתה לכסינה הפ"מ היה x אבל x אינו מאפס את AB.

2. תהא $A \in^{n\times n}$. הוכיחו שאם A לכסינה אז גם A^t לכסינה.
פתרון: אם A לכסינה, קיימת P הפיכה ו D אלכסונית כך ש
$$P^{-1}AP = D$$
נפעיל שיחלוף ונקבל
$$P^tA^t\left(P^{-1}\right)^t = D^t = D$$
ונשים לב ש $P^t, \left(P^{-1}\right)^t$ הופכיות אחת של השניה.

3. תהא $A \in^{n\times n}$ הפיכה. הוכיחו: אם A^2 לכסינה אז גם A לכסינה. האם הטענה נכונה עבור מטריצות מעל ?
פתרון: אם A^2 לכסינה אז הפ"מ מתפרק למל"ל שונים
$$m_{A^2}(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_m)$$
ולכן, לפי הגדרה
$$\left(A^2-\lambda_1 I\right)\cdots\left(A^2-\lambda_m I\right) = 0$$
את צד שמאל אפשר לכתוב
$$\left(A-\sqrt{\lambda_1}I\right)\left(A+\sqrt{\lambda_1}I\right)\cdots\left(A-\sqrt{\lambda_m}I\right)\left(A+\sqrt{\lambda_m}I\right) = 0$$
ולכן
$$f(x) = \left(x-\sqrt{\lambda_1}\right)\left(x--\sqrt{\lambda_1}\right)\cdots\left(x-\sqrt{\lambda_m}\right)\left(x--\sqrt{\lambda_m}\right)$$

מקיים כי $f(A)=0$ ולכן m_A מחלק אותו. כיוון ש f מל"ל שונים גם m_A מל"ל שונים. למה f מל"ל שונים? $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ הם ע"ע של A^2 ולכן שונים מאפס כי A^2 הפיכה. ולכן $\sqrt{\lambda_i}\neq-\sqrt{\lambda_i}$ ובנוסף לכל $i\neq j$ מתקיים כי $\sqrt{\lambda_i}\neq\pm\sqrt{\lambda_j}$ כי אחרת הם שווים ואז בריבוע הם שווים ונקבל $\lambda_i=\lambda_j$ סתירה. קיבלו ש m_A הפ"מ של A מל"ל שונים ולכן A לכסינה.

(א) הערה: אם A אינה הפיכה - הטענה לא נכונה. למשל

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

לא לכסין אבל $A^2=0$ כן לכסינה.

(ב) הערה: אם A ממשית - הטענה לא נכונה. למשל

$$A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

לא לכסינה כי $p_A(x)=x^2+1$ אבל $A^2=-I$ שאלכסונית ובפרט לכסינה.

4. תהא מטריצה A המקיימת $A^2=A$ (קוראים למטריצות כאלה מטריצות אידמפוטנטית).
הוכיחו כי A לכסינה ומצאו את כל צורת זורדן האפשריות.
פתרון: מהנתון $A^2-A=0$ ולכן $A(A-I)=0$, ולכן הפולינום $f(x)=x(x-1)$ מאפס את A ולכן m_A מחלק אותו (כלומר $m_A(x)\in\{x(x-1),x,x-1\}$. בכל מקרה , m_A מל"ל שונים ולכן A לכסינה.
מה צורת זורדן האפשרויות ל A?
תשובה:

$$\begin{pmatrix}I_{k\times k}&\\&0_{(n-k)\times(n-k)}\end{pmatrix}$$

למה? כל מטריצה כזאת אכן בריבוע שווה לעצמה. מצד שני, אם A מקיימת כי $A^2=A$ אז היא לכסינה כמו שראינו. וגם אם נשים לב הוכחנו שהע"ע היחידים יכולים להיות $0,1$.

5. תהא $0\neq A\in^{n\times n}$ נילפוטנטית. הוכיחו: A אינה לכסינה.
הוכחה: ראיתם ש $p_A(x)=x^n$ (או לפי הגדרה, קיים k כך ש $A^k=0$ ולכן x^k מאפס את A). ומכאן שאם A היתה לכסינה אז $m_A(x)=x$ כלומר $A=0$ סתירה.

6. תרגיל: תהא $T:V\to V$ ה"ל. אם כל $0\neq v$ הוא וקטור עצמי אזי קיים סקלר α כך ש $T=\alpha I$ (באופן דומה גם למטריצה A).
הוכחה: טענה: קיים ע"ע יחיד ל T. הוכחת הטענה: נב"ש שקיימים $\lambda_1\neq\lambda_2$ ע"ע.

קיימים v_1, v_2 ו"ע בהתאמה (בפרט בת"ל). לפי הנתון גם v_1+v_2 הוא ו"ע ולכן קיים λ כך ש

$$T(v_1+v_2) = \lambda(v_1+v_2)$$

ולכן

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = Tv_1 + Tv_2 = T(v_1+v_2) = \lambda(v_1+v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$$

כיוון ש v_1, v_2 בת"ל נקבל ש $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \lambda$.
מהנתון שכל וקטור שונה מאפס הוא ו"ע נסיק בפשטות ש T לכסינה ולכן $m_T(x) = x-\lambda$ כאשר λ הוא הע"ע היחיד שיש לה (לפי טענה קודמת). מכאן ש $T-\lambda I = 0$ ולכן $T = \lambda I$. (באופן אחר היינו יכולים להגיד ש $Tv = \lambda v$ לכל v כי יש ע"ע יחיד ונתון שכל וקטור שונה מאפס הוא ו"ע)

7. יהא $T : V \to V$ ה"ל. יהא $1 < k < \dim V = n$. הוכיחו שאם כל ת"מ W מימד k הוא T- אינו' אז $T = \alpha I$.
הוכחה: בואו נוכיח שכל וקטור שונה מאפס הוא ו"ע ואז לפי טענה קודמת סיימנו.
יהא $v \neq 0$ נקרא לו $v_1 = v$ נשלים אותו לבסיס של V

$$\{v_1, \ldots, v_n\}$$

בסיס של V. $W = \text{span}\{v_1, \ldots v_{k-1}, v_k\}$ הוא T- אינו' לפי נתון ולכן קיימים סקלרים כך ש

$$T(v_1) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$$

נוכיח כי $\alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_k = 0$ (ואז $Tv_1 = \alpha_1 v_1$ וסיימנו). יהא $2 \le j \le k$ ונסתכל על $W' = \text{span}\left(\{v_1, \ldots v_{k-1}, v_k\} \setminus \{v_j\}\right) \cup \{v_{k+1}\}$ כלומר מהקבוצה $\{v_1, \ldots v_{k-1}, v_k\}$ הורדנו את v_j והוספנו את v_{k+1} וקיבלנו שהם פורשים את W' שגם הוא מימד k ולכן T-אינו'. ולכן קיימים סקלרים

$$T(v_1) = \sum_{i \in \{1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k,k+1\}} \beta_i v_i$$

קיבלנו ש

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = \sum_{i \in \{1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k,k+1\}} \beta_i v_i$$

ובפרט המקדם של v_j הוא אפס מצד ימין ולכן גם מצד שמאל.

8. תרגיל: נניח A דומה ל B. הוכיחו כי $(3B^3+2B^2+B+I) = (3A^3+2A^2+A+I)$

הוכחה: ראיתם (גם אם תכחישו!) שאם A דומה ל B אז $f(A)$ דומה ל $f(B)$ לכל פולינום f. בפרט עבור $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ ובנוסף למטריצות דומות אותו דרגה. סיימנו.

9. תהא $T : V \to V$ ה"ל ויהא W ת"מ T-אינו'. הוכיחו: אם T לכסינה אז $T|_W$ לכסינה ($T|_W : W \to W$).

הוכחה: כיוון ש T לכסינה הפ"מ שלה מלל"ש (=מל"ל שונים)

$$m_T(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_m)$$

ואז

$$(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_m I) = 0$$

ואז

$$(T|_W - \lambda_1 I) \cdots (T|_W - \lambda_m I) = 0$$

שהרי ברור שאם כל $v \in V$ מקיים כי $(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_m I) v = 0$ זה נכון בפרט לכל $w \in W$. ולכן $m_{T|_W}$ מחלק את m_T ובפרט מלל"ש ולכן $T|_W$ לכסינה.

10. האם קיימת מטריצה ממשית בגודל 2×2 כך ש $A^{2000} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$?

פתרון: לא! נב"ש שקיימת כזאת. נפעיל דט' על שני האגפים ונקבל $|A|^{2000} = -2$ סתירה.

11. האם קיימת מטריצה ממשית בגודל 2×2 כך ש $A^{2000} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

פתרון: לא! נב"ש שקיימת כזאת. נחשוב עליה כמטריצה מרוכבת. טענה1: ל A אין ע"ע ממשיים. הוכחה1: אם λע"ע ממשי של A אז λ^{2000} ע"ע של A^{2000} אבל זה אומר ש $\lambda^{2000} \in \{-1, -2\}$ סתירה.

מסקנה: קיים לו שורש מרוכב, לא ממשי, λ ולכן גם הצמוד של λ הוא שורש (ששונה מ λ) ולכן, מעל המרוכבים, $p_A(x) = (x - \lambda)\left(x - \overline{\lambda}\right)$ (תזכורת: לפולינום ממשי, אם z מרוכב הוא שורש של הפולינום אז גם $\overline{z}$ הוא שורש של הפולינום). ולכן $\lambda^{2000}, \overline{\lambda}^{2000}$ הם ע"ע של A^{2000}. מכיוון של A^{2000} יש 2 ע"ע - זה הם. כלומר $\left\{\lambda^{2000}, \overline{\lambda}^{2000}\right\} = \{-1, -2\}$ ואז

$$|\lambda|^{2000} = \left|\lambda^{2000}\right| = \left|\overline{\lambda}^{2000}\right| = \left|\overline{\lambda}\right|^{2000}$$

ומכאן ש $|-2| = |-1|$ סתירה.