תרגול 7- לכסון ה"ל ופולינום מינימלי

משפט. $T:V\to V$ הל התנאים הבאים שקולים

1. T לכסינה.
2. כל בסיס B של V מקיים ש-$[T]_B^B$ לכסינה.
3. קיים בסיס B' ל-V המורכב מו"ע ומתקיים $[T]_{B'}^{B'}$ אלכסונית.

תרגיל. לכסנו את העתקה $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+2y \\ x \end{pmatrix}$

פתרון. ראשית נמצא את המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס הסטנדרטי.

$$[T]_S^S=\begin{pmatrix} | & | \\ \left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_S & \left[T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_S \\ | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & | \\ \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_S & \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_S \\ | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

כעת נמצא את העע והו"ע של $[T]_S^S$, לפי השיעור הקודם $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$הוא וע של -1ו- $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא וע של 2.

לכן אם נסמן $B'=\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ נקבל ש-

$$[T]_{B'}^{B'}=\begin{pmatrix} | & | \\ \left[T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{B'} & \left[T\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{B'} \\ | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & | \\ \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_{B'} & \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right]_{B'} \\ | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

משפט. משפט קיילי המילטון. כזכור $p_A(A)=0$ - אם נציב בפולינום האופייני את המטריצה נקבל את מטריצת ה-0

הגדרה. הפולינום המינימלי של A הוא הפולינום בעל חזקה מינימלית המקיים $m_A(A)=0$

משפט. אם

$$p_A(\lambda)=\prod_{i=1}^{l}(\lambda-\lambda_i)^{q_i^{(1)}}\left(\lambda^2+a\lambda+b\right)^{q_i^{(2)}}=(\lambda-\lambda_1)^{q_1^{(1)}}\dots(\lambda-\lambda_l)^{q_n^{(1)}}\left(\lambda^2+a\lambda+b\right)^{q_1^{(2)}}\dots\left(\lambda^2+a\lambda+b\right)^{q_l^{(2)}}$$

אז

$$m_A(\lambda)=\prod_{i}^{l}(\lambda-\lambda_i)^{m_i^{(1)}}\left(\lambda^2+a\lambda+b\right)^{m_i^{(2)}}=(\lambda-\lambda_1)^{m_1^{(1)}}\dots(\lambda-\lambda_l)^{m_l^{(1)}}\left(\lambda^2+a\lambda+b\right)^{m_1^{(2)}}\dots\left(\lambda^2+a\lambda+b\right)^{m_l^{(2)}}$$

כאשר $1\le m_i\le n_i$, בקיצור לפולינום המינימלי קיימים אותם גורמים אי פריקים כמו לפולינום האופייני.
למשל אם הפולינום האופייני הוא $(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$אז הפולינום המינמלי יכול להיות

$$\begin{cases} (\lambda-1)(\lambda-2) \\ (\lambda-1)(\lambda-2)^2 \\ (\lambda-1)^2(\lambda-2) \\ (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2 \end{cases}$$

תרגיל. מצא את הפולינום המינימלי של $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

פתרון. ראשית נמצא את הפולינום האופייני של A

$$p_A(\lambda)=\left|\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}\right|=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

לכן הפולינום המינימלי יכול להיות $m_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ או $m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)$ לדעת יש להציב ולבדוק.

- $m_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$:

$$m_A(A) = (A-I)(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן זה הפולינום האופייני.

משפט. לכל פולינום $f(x)$ המקיים $f(A)=0$ הפולינום המינימלי מחלק אותו.

תרגיל. תהא $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ הפיכה כך ש $\left(A^3+A\right)(A-2I)=0$ ומקיימת כי $tr(A)=2$. מצא פ"מ. (ופולינום אופייני אם יש זמן)

פתרון. מהנתון נקבל כי הפולינום $g(x) = \left(\lambda^3+\lambda\right)(\lambda-2) = \lambda\left(\lambda^2+1\right)(\lambda-2)$ מאפס את A ולכן הפ"מ מחלק אותו. מכאן ש

$$m_A(\lambda) \in \left\{\lambda\left(\lambda^2+1\right)(\lambda-2), \left(\lambda^2+1\right)(\lambda-2), \lambda(\lambda-2), \lambda\left(\lambda^2+1\right), \lambda\left(\lambda^2+1\right), \lambda^2+1, (\lambda-2), \lambda\right\}$$

כיוון ש A הפיכה, אין לה ע"ע 0 ולכן אין גורם λ בפולינום האופייני ומכאן אין גם את הגורם הזה בפולינום המינימלי.. לכן נשאר רק עם

$$m_A(\lambda) \in \left\{\left(\lambda^2+1\right)(\lambda-2), \lambda^2+1, (\lambda-2)\right\}$$

- הפולינום $(\lambda-2)$ לא יכול להיות כי אז $A-2I=0$ לכן $A=2I$ מכאן ש-$tr(A)=14\neq 2$
- הפולינום λ^2+1 לא יכול להיות כי אז $A^2+I=0$ מה שגורר $A^2=-I$. אם נוציא דט' נקבל כי $|A|^2=-1$ מה שלא יכול להיות.
- לכן נשאנו עם $m_A(\lambda)=\left(\lambda^2+1\right)(\lambda-2)$.

פולינום אופייני

- בתור מטריצה מרוכבת יש לה רק את הע"ע $\pm i, 2$. כיוון שהסכום שלהם =2 אזי יש לה רק ע"ע בודד ששווה 2 ($tr(A)$ שווה סכום הע"ע המרוכבים שלה)

ולכן $p_A(A)=\left(\lambda^2+1\right)^3(\lambda-2)$ (כי החזקה צריכה להיות 7)
הערה: הדט' של A =2 כי יש לה הע"ע (כמטריצה מרוכבת) הם $\pm i, \pm i \pm i, 2$ והט' = מכפלתם