בוחן אינפי 1 למדמ"ח תשעז

כ"ו כסלו 26/12/2016

מתרגלים: אריאל ויצמן, אורלי ברשבסקי, אלעד עטייא, מרדכי יעקב.

- ענו על כל השאלות.
- **יש לענות על דפי השאלון בלבד!**
- **על כל דף תשובה רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא.**
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- חומר עזר: מחשבון בלבד.
- לא ניתן לצבור מעל 100 נקודות בבוחן.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
סה"כ	

בהצלחה!

1. יהיו $a.b \in \mathbb{R}^*$ מספרים היפר ממשיים. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $st(a)$ לא קיים אז $st(a+b)$ לא קיים. (8 נקודות)

ב. אם $st(a)$ לא קיים ו־ $st(a+b)$ קיים אז $st(b)$ לא קיים. (8 נקודות)

ג. אם $st(a)$ לא קיים אז $st(a \cdot b)$ לא קיים. (8 נקודות)

ד. אם $st(a)$ לא קיים וגם $st(b)$ לא קיים אז $st(a \cdot b)$ לא קיים. (8 נקודות)

<u>פיתרון:</u>

א. לא נכון: a הוא אינסופי, נסמנו ב־H, ניקח $b=-H$ ונקבל ש $st(a+b)=st(H-H)=st(0)=0$, שהוא אכן קיים.

ב. נכון: נניח בשלילה ש־ $st(b)$ קיים, לכן b מספר סופי, אבל אז, מהעובדה ש־ $st(a)$ לא קיים נובע ש־a אינסופי, ולכן $a+b$ אינסופי כחיבור של אינסופי וסופי, ולכן $st(a+b)$ לא קיים בסתירה. לכן $st(b)$ לא קיים.

ג. לא נכון: ניקח $b=\frac{1}{a}$, ולכן $st(ab)=st(1)=1$, שהוא אכן קיים.

ד. נכון: מכפלה של אינסופיים זה מספר אינסופי: יהיו H,K אינסופיים, צריך להראות שלכל $r \in \mathbb{R}$ מתקיים: $|HK|>r$. אכן כיון ש־ H,K אינסופיים אזי לכל $r \in \mathbb{R}$ מתקיים $|H|>\sqrt{r}, |K|>\sqrt{r}$, ולכן $|HK|=|H||K|>\sqrt{r}\sqrt{r}=r$.

2. א. גזרו, לפי כללי הגזירה שלמדנו, את הפונקציה $f(x)=e^{x^x}$. (15 נקודות)

ב. תהיינה u,v פונקציות של x. נתבונן בפונקציה $y=\frac{1}{u+v}$. מצאו את $\frac{dy}{dx}$ במונחים של du,dv. (15 נקודות)

פיתרון:

א. נכתוב את הפונקציה $f\left(x\right)$ בצורה שונה:

$$f\left(x\right)=e^{x^x}=e^{e^{ln\left(x^x\right)}}=e^{e^{xln(x)}}$$

ולכן הנגזרת היא:

$$\frac{df}{dx}=\frac{d\left(e^{e^{xln(x)}}\right)}{dx}=e^{e^{xln(x)}}\cdot\left(e^{xln(x)}\right)'=e^{e^{xln(x)}}\cdot e^{xln(x)}\cdot\left(xln\left(x\right)\right)'$$

$$=e^{e^{xln(x)}}\cdot e^{xln(x)}\cdot\left(ln\left(x\right)+1\right)$$

ב. לפי נגזרת של מנה נקבל:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d(1)}{dx}\cdot\left(u+v\right)-\frac{d(u+v)}{x}\cdot 1}{\left(u+v\right)^2}=\frac{\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}}{u^2+2uv+v^2}$$

3. א. בהינתן ש־y היא פונקציה של x, מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $x^3 - x^2 + y^2 = xy$ בנקודות בהן $x = -1$. (15 נקודות)

ב. נתונה הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & x < 0 \\ ax + b & 0 \le x \le 2 \\ \frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x^2+5}-x-1} & x > 2 \end{cases}$$

מצאו את ערכי a, b עבורם קיימים הגבולות $\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to 2} f(x)$. (15 נקודות)

<u>פיתרון:</u>

א. ראשית נעזר בנגזרת של פונקציה סתומה בכדי לחשב את $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{d\left(x^3 - x^2 + y^2\right)}{dx} = \frac{d\left(xy\right)}{dx}$$

$$3x^2 - 2x + 2y\frac{dy}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$$

נעביר אגפיים ונקבל:

$$\frac{dy}{dx}\left(x - 2y\right) = 3x^2 - 2x - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2x - y}{x - 2y}$$

כעת נרצה לחשב את השיפוע, לצורך כך נצטרך לחשב את הנקודות שבהן $x = -1$, נעזר בצורה הסתומה $x^3 - x^2 + y^2 = xy$ ונזכור ש y היא פונקציה של x ולכן:

$$\left(-1\right)^3 - \left(-1\right)^2 + \left(y\left(-1\right)\right)^2 = -y\left(-1\right)$$

$$-2 + \left(y\left(-1\right)\right)^2 = -y\left(-1\right)$$

אם נסמן $y\left(-1\right) = t$ נקבל

$$t^2 + t - 2 = 0$$

שפתרונותיה הם:

$$t_1 = 1, \quad t_2 = -2$$

ולכן נקודות ההשקה הן:

$$\left(-1, 1\right), \quad \left(-1, -2\right)$$

כעת נמצא את השיפועים עבור כל נקודת השקה:

$$m_1 = \frac{dy}{dx}\mid_{(-1,1)} = \frac{3x^2 - 2x - y}{x - 2y}\mid_{(-1,1)} = -\frac{4}{3}$$

$$m_2 = \frac{dy}{dx}\mid_{(-1,-2)} = \frac{3x^2-2x-y}{x-2y}\mid_{(-1-2)} = \frac{7}{3}$$

נחשב את משוואת המשיק עם $m_1 = -\frac{4}{3}$, בנקודה $(-1,1)$ ונקבל :

$$y-1 = -\frac{4}{3}(x+1)$$

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$$

נחשב את משוואת המשיק עם $m_2 = \frac{7}{3}$, בנקודה $(-1,-2)$ ונקבל :

$$y+2 = \frac{7}{3}(x+1)$$

$$y = \frac{7}{3}x + \frac{1}{3}$$

ב. נחשב את הגבול בנקודה שבה $x=0$, נעזר במשפט שאם הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים אזי הגבול קיים בנקודה קיים.

מצד אחד:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = st\left(f\left(\Delta x\right)\right) = st\left(\left(\Delta x+1\right)^2\right) = \left(st\left(\Delta x+1\right)\right)^2 = 1^2 = 1$$

מצד שני:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = st\left(f\left(\Delta x\right)\right) = st\left(\left(a\Delta x+b\right)\right) = \left(st\left(a\Delta x+b\right)\right) = st\left(a\Delta x\right) + st\left(b\right) = b$$

שימו לב כי a ממשי ו־ Δxאינפיניטסימל לכן $a\Delta x$ אף הוא אינפיניטסימל ולכן: $st\left(a\Delta x\right)=0$ כמו כן b ממשי ולכן $st\left(b\right)=b$.

לכן כדי שהגבול $\lim_{x\to 0} f(x)$ יהיה קיים, נדרוש שהגבולות החד צדדיים יהיו שווים, כלומר $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ ולכן :

$$b = 1$$

.

כעת נחשב את הגבול בנקודה שבה $x=2$:

מצד אחד:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = st\left(f\left(2+\Delta x\right)\right) = st\left(a\left(2+\Delta x\right)+1\right) = \left(st\left(2a\right)+st\left(\Delta x\right)+1\right) = 2a+1$$

מצד שני:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = st\left(f\left(2+\Delta x\right)\right) = st\left[\frac{\sqrt{2+\Delta x+7}-3}{\sqrt{\left((2+\Delta x)^2+5\right)}-(2+\Delta x)-1}\right] =$$

$$= st\left[\frac{\sqrt{\Delta x+9}-3}{\sqrt{\left((2+\Delta x)^2+5\right)}-3-\Delta x}\right] = st\left[\frac{\left(\sqrt{\Delta x+9}-3\right)}{\sqrt{\left((2+\Delta x)^2+5\right)}-(3+\Delta x)}\right]$$

כעת נעזר ב"כפל בצמוד" גם במונה וגם במכנה:

$$st\left[\frac{\left(\sqrt{\Delta x+9}-3\right)}{\sqrt{\left((2+\Delta x)^2+5\right)}-(3+\Delta x)}\right] = st\left[\frac{\left(\sqrt{\Delta x+9}-3\right)\left(\sqrt{\Delta x+9}+3\right)\left[\sqrt{\left((2+\Delta x)^2+5\right)}+(3+\Delta x)\right]}{\left(\sqrt{\Delta x+9}+3\right)\left[\sqrt{\left((2+\Delta x)^2+5\right)}-(3+\Delta x)\right]\left[\sqrt{\left((2+\Delta x)^2+5\right)}+(3+\Delta x)\right]}\right]$$

$$= st\left[\frac{(9+\Delta x-9)\left[\sqrt{\left((2+\Delta x)^2+5\right)}+(3+\Delta x)\right]}{\left(\sqrt{\Delta x+9}+3\right)\left[\left((2+\Delta x)^2+5\right)-(3+\Delta x)^2\right]}\right] =$$

$$= st\left[\frac{(\Delta x)\left[\sqrt{\left((2+\Delta x)^2+5\right)}+(3+\Delta x)\right]}{\left(\sqrt{\Delta x+9}+3\right)\left[4+4\Delta x+(\Delta x)^2+5-9-6\Delta x-9\right]}\right] =$$

$$= st\left[\frac{(\Delta x)\left[\sqrt{\left((2+\Delta x)^2+5\right)}+(3+\Delta x)\right]}{(-2\Delta x)\left(\sqrt{\Delta x+9}+3\right)}\right] = st\left[\frac{\left[\sqrt{\left((2+\Delta x)^2+5\right)}+(3+\Delta x)\right]}{-2\left(\sqrt{\Delta x+9}+3\right)}\right] =$$

$$= \frac{st\left(\left[\sqrt{\left((2+\Delta x)^2+5\right)}+(3+\Delta x)\right]\right)}{st\left(-2\left(\sqrt{\Delta x+9}+3\right)\right)} = \frac{\sqrt{st\left((2+\Delta x)^2+5\right)}+st\left(3+\Delta x\right)}{-2\left(\sqrt{st\left(\Delta x+9\right)}+3\right)} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}$$

כדי שהגבול $\lim_{x\to 2} f(x)$ יהיה קיים, נדרוש שהגבולות החד צדדיים יהיו שווים, כלומר $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$ ולכן :

$$2a+1 = -\frac{1}{2} \Longrightarrow a = -\frac{3}{4}$$

4. הגדירו את המושגים הבאים:

א. נגזרת של פונקציה בנקודה. (5 נקודות)

ב. מספר אינסופי שלילי. (5 נקודות)

ג. גבול שמאלי של פונקציה בנקודה. (5 נקודות)