תרגיל: חשבו את הבסיס הדואלי ל $B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$,v_3=$\left. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

פתרון: אנחנו מחפשים 3 העתקות לינאריות $T_1, T_2, T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ומקיימות:

$$T_1(v_1) = 1, T_1(v_2) = 0, T_1(v_3) = 0$$

$$T_2(v_1) = 0, T_2(v_2) = 1, T_2(v_3) = 0$$

$$T_3(v_1) = 0, T_3(v_2) = 0, T_3(v_3) = 1$$

צריך לבנות 3 העתקות לינאריות לפי משפט ההגדרה.
איך נמצא אותן בצורה מפורשת?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x-y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (y-z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x - y$$

$$T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y - z$$

$$T_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z$$

$$B^* = \left\{ T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x - y, T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y - z, T_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \right\}$$

נשים לב שלכל בסיס $B = \{v_1, .., v_n\}$, הבסיס הדואלי $B^* = \{T_1, .., T_n\}$ מקיים שלכל וקטור $v \in V$,

$$v = \sum \alpha_i v_i$$

$$T_j(v) = \alpha_j$$

הסבר:

$$T_j(v) = T_j(\sum \alpha_i v_i) = \sum \alpha_i T_j(v_i) = \alpha_1 \cdot 0 + .. + \alpha_j \cdot 1 + .. + \alpha_n \cdot 0 = \alpha_j$$

תרגיל המשך: מצאו את $(B^*)^*$.
פתרון: בעיקרון אנחנו מחפשים עכשיו 3 העתקות לינאריות $(\mathbb{R}^3)^* \to \mathbb{R}$.
לכל וקטור ב$\mathbb{R}^3$, v, אנחנו יכולים להגדיר באמצעותו העתקה לינארית $\hat{v} : (\mathbb{R}^3)^* \to \mathbb{R}$ שמוגדרת כך:

$$\hat{v}(T) = T(v)$$

ראיתם בהרצאה שזה כל ההעתקות הלינאריות $(\mathbb{R}^3)^* \to \mathbb{R}$.
כעת אנחנו מחפשים 3 העתקות f_1, f_2, f_3 שיקיימו

$$f_1(T_1) = 1, f_1(T_2) = 0, f_1(T_3) = 0$$

$$f_2(T_1) = 0, f_2(T_2) = 1, f_2(T_3) = 0$$

$$f_3(T_1) = 0, f_3(T_2) = 0, f_3(T_3) = 1$$

אבל אנחנו יודעים שההעתקות האלה הם מהצורה של $\hat{u_1}, \hat{u_2}, \hat{u_3}$. כלומר, מתקיים ש:

$$T_1(u_1) = 1, T_2(u_1) = 0, T_3(u_1) = 0$$

אנחנו יודעים שהוקטור $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ מקיים את זה, כי ככה בנינו את B^*. לכן $f_1 = \hat{v_1}$
כנ"ל לגבי f_2- אנחנו יודעים שהוקטור v_2 מהבסיס המקורי B מקיים שT_1 שולח אותו ל0, T_2 שולח אותו ל1 וT_3 שולח אותו ל0. כי ככה בנינו את B^*.
וכו'. לכן

$$B^{**} = \{\hat{v_1}, \hat{v_2}, \hat{v_3}\}$$

תרגיל המשך: חשבו את $\left(span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)^0$.
פתרון: המאפס של הספאן שווה למאפס של הקבוצה.
ממשפט מההרצה אתם יודעים ש

$$\dim span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \dim \left(span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)^0 = \dim V = 3$$

ולכן המימד של המאפס הוא 2.

אז מספיק למצוא 2 פונקציונליים בת"ל ששולחים את $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, וזה יכול להיות T_2, T_3 מהבסיס הדואלי שבנינו.

הערה: למעשה כל שני פונקציונלים בת"ל שישלחו את $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ל-0 יעבדו. אפשר לקחת למשל את $S_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y, S_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z$

באופן כללי, בשביל למצוא מאפס של קבוצה, נמצא בסיס למרחב שהיא פורשת, נשלים אותו לבסיס למרחב כולו, נבנה את הבסיס הדואלי המתאים, ואז מהבסיס הדואלי נקח את כל הפונקציונלים ששולחים את איברי הקבוצה שלנו ל-0. זה יתן בסיס למאפס.

$E^0 = span(E)^0$. נמצא בסיס לספאן של E, נניח C (ניתן למצוא ע"י צמצום של E לקבוצה בת"ל. את C נשלים לבסיס B של V.

$$C \cup D = B$$

מוצאים את B^*. בתוך B^* יש פונקציות ששולחות את כל איברי C ל-0. הפונקציות האלו יהיו בסיס למאפס.

איך בודקים אם העתקות לינאריות תלויות/בת"ל? עוברים למטריצה מייצגת ואז בודקים על מטריצות. (או לפי הגדרה כמובן).

תרגיל: מצאו B^* עבור $\left\{T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y, T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x - y\right\} = B$ זה בסיס של $\mathbb{R}^{2*}$

פתרון: נמצא C בסיס של $\mathbb{R}^2$ כך ש-$B = C^*$.

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\}$$

כך ש:

$$T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 1, T_1 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$T_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0, T_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 1$$

מקבלים 2 משוואות על כל אחד מהוקטורים.

$$x_1 + y_1 = 1$$

$$x_1 - y_1 = 0$$

$$v_{1=} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$x_2 + y_2 = 0$$

$$x_2 - y_2 = 1$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

אז:

$$B^* = \{\hat{v_1}, \hat{v_2}\}$$

מבחן תשפ מועד א

1. הוכיחו/הפריכו:

(א) יהא T אופרטור צמוד לעצמו אזי $T + iI$ אופרטור הפיך.

(ב) אם $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ניתנת ללכסון וכל הע״ע שלה הם 1 ו -1 אז $A^2 = I$.

(ג) אם $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מקיימת כי $A + A^* = I + A^2$ אז A ניתנת ללכסון אוניטרי.

פתרון: א. הוכחה: T צל״ע לכן כל הע״ע שלו ממשיים, בפרט $-i$ הוא לא ע״ע, ולכן אין לו וקטור עצמי, אז מרחב האפס של $T + iI$ הוא 0. זאת העתקה חח״ע ממרחב לעצמו, אז ממשפט הדרגה היא גם על ולכן הפיכה.

ב.הוכחה: הצורה האלכסונית שלה היא עם 1 ו-1 על האלכסון.

$$A^2 = PD^2P^{-1} = PIP^{-1} = I$$

כי להעלות את D בריבוע זה להעלות את רכיבי האלכסון בריבוע. ו$(\pm 1)^2 = 1$.

ג. במרוכבים לכסינה אוניטרית שקול לנורמלית.

$$A^* = I + A^2 - A$$

קל לראות שA וA^* מתחלפים כי A ו$I + A^2 - A$ מתחלפים.

$$AA^* = A(I + A^2 - A) = A + A^3 - A^2 = (I + A^2 - A)A = A^*A$$

כלומר A נורמלית, ולכן לכסינה אוניטרית.

1. לכל אחת מהטענות הבאות, קבעו האם היא נכונה לכל $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, לאף $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ או שלפעמים כן ולפעמים לא (יש לתת דוגמה לכל מקרה). נתון שהע״ע של A הם $0, 1, -1$.

(א) A הפיכה.

(ב) A אורתוגונלית.

(ג) $A^3 = A$.

פתרון: א. לאף מטריצה. כי יש ע"ע 0.

ב. לאף מטריצה. כי אורתוגונלית היא בפרט הפיכה.

ג. אנחנו יכולים למצוא במפורש את הפ"א כי A מגודל 3×3 ויש 3 ע"ע.

$$x(x-1)(x+1) = x(x^2-1) = x^3 - x$$

A מאפסת את הפ"א ולכן $A^3 = A$.

1. מצאו את כל הערכים העצמיים של

$$A = \begin{pmatrix} 10001 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 10003 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 10005 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 10007 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 10009 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 10011 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

רעיונות שנזרקו לחלל האוויר: ה$trace$ הוא סכום הע"ע.

הסכום של הרכיבים בכל שורה שווה ולכן הוא ע"ע, $10,036$.

$$A - 10,000I = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

היא מטריצה מדטרמיננטה 0 לכן $10,000$ הוא ע"ע.

הר"ג של $10,000$ הוא 5. אז הר"א שלו גדול שווה מ5. אבל יש עוד ע"ע, לכן הר"א שלו הוא 5.

לכן יש שני ע"ע (כי סכום הריבויים האלגבריים הוא 6). $10,000, 10,036$.

1. יהא V ממ"פ מעל $\mathbb{C}$ ויהיו $a, b \in V$. נגדיר $T : V \to V$ ע"י $T(v) = \langle v, a \rangle b$. מצאו נוסחה מפורשת עבור T^* (העקתה הצמודה).

פתרון:

$$\langle Tv, u \rangle = \langle v, T^*u \rangle$$

$$\langle \langle v, a \rangle b, u \rangle = \langle v, a \rangle \langle b, u \rangle = \langle v, \overline{\langle b, u \rangle} a \rangle$$

$$T^*(u) = \overline{\langle b, u \rangle} a = \langle u, b \rangle a$$

1. יהא $V=\mathbb{R}^4$ עם המכפלה הסקלרית. נגדיר

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\1&0&0&0\\7&3&3&3\end{pmatrix}$$

ונגדיר $T:V\to V$ ע״י $T(v)=Av$.

(א) האם $u=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ שייך ל $\mathrm{Im}T$? אם כן, מצאו מקור ל u. אחרת, מצאו את הוקטור ב $\mathrm{Im}T$ הקרוב ביותר ל u.

(ב) נסמן ב R את מרחב העמודות של A^T (תת מרחב של V), מצאו בסיס אורתונורמלי ל R ול $R^\perp$.

(ג) יהא $H=\ker T$. הוכיחו כי $H=R^\perp$.

פתרון:

א. בשביל לבדוק האם הוקטור שייך לתמונה $\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\1&0&0&0&1\\7&3&3&3&1\end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&-1&-1&-1&0\\0&-4&-4&-4&-6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&-2\end{array}\right)$$

הוקטור לא בתמונה.
אנחנו צריכים לחשב את ההטלה של v על ImT.
בשביל לחשב הטלה של וקטור על תת מרחב צריך למצוא בסיס או"ג לתת מרחב.
נתחיל בסיס כלשה לImT ונפעיל עליו גראם-שמידט.

התמונה של T זה מרחב העמודות, אז בסיס יהיה שני הוקטורים הראשונים $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\7\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\3\end{pmatrix}$

נעשה גראם שמידט

$$u_1=v_1$$

$$u_2=v_2-\frac{22}{51}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{29}{51}\\1\\-\frac{22}{51}\\\frac{-1}{51}\end{pmatrix}$$

$$\pi_{ImT}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\7\end{pmatrix}\rangle}{\langle\begin{pmatrix}1\\0\\1\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\7\end{pmatrix}\rangle}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\7\end{pmatrix}+\frac{\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{29}{51}\\1\\-\frac{22}{51}\\\frac{-1}{51}\end{pmatrix}\rangle}{\langle\begin{pmatrix}\frac{29}{51}\\1\\-\frac{22}{51}\\\frac{-1}{51}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{29}{51}\\1\\-\frac{22}{51}\\\frac{-1}{51}\end{pmatrix}\rangle}\begin{pmatrix}\frac{29}{51}\\1\\-\frac{22}{51}\\\frac{-1}{51}\end{pmatrix}$$

ב.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\1&0&0&0\\7&3&3&3\end{pmatrix}$$

צריך למצוא בסיס או"נ למרחב השורות של A ול$R(A)^\perp$

פתרון: מהדירוג שעשינו רואים שמרחב השורות הוא ממימד 2, אז כל 2 שורות בת"ל יהוו בסיס, נבחר את השורות השניה והשלישית, הן כבר מאונכות. נשאר רק לנרמל אותן.

הניצב של מרחב השורות של מטריצה A הוא $N(A)$.

הסבר:

$$v\in N(A)\iff Av=0\iff\forall i,(Av)_i=0\iff\forall i,R_i(A)^tv=0\iff v\in(R(A))^\perp$$

בסיס למרחב ה0 הוא

$$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

עושים גראם-שמידט ומנרמלים.

ג. עשינו בתוך ההוכחה של סעיף ב, כי $\ker T=N(A)$.

$$\langle v,u\rangle=v^tu$$

משפטים:

ע"ע של אוניטרית הם מאורך 1. כלומר, הם על מעגל היחידה במרוכבים. ולכן אם הם ממשיים זה ± 1.

ע"ע של צל"ע הם ממשיים.

ו"ע של ע"ע שונים במטריצה/ העתקה נורמלית מאונכים אחד לשני.