# תרגיל 7

1. יהי $D \in \mathbb{Z}$. הוכיחו ששדה השברים של $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ הוא $\mathbb{Q}[\sqrt{D}]$.
פתרון:

ניתן להניח ש$D$ חופשי מריבועים. (אחרת, נסמן ב$D_0$את החלק ב$D$ שחופשי מריבועים ונשים לב ש$\mathbb{Q}[\sqrt{D}] = \mathbb{Q}[\sqrt{D_0}]$. כמו כן, ל $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ ול$\mathbb{Z}[\sqrt{D_0}]$ יש אותו שדה שברים.

ובכן, ראשית נוכיח ש$\mathbb{Q}[\sqrt{D}]$ הוא אכן שדה. ובכן, יהי $0 \neq a = x + y\sqrt{D}$ איבר בחוג. כלומר, $x, y \in \mathbb{Q}$. נשים לב ש$N(a) = N(x + y\sqrt{D}) = x^2 - Dy^2 \in \mathbb{Q}$.
כמו כן, מכיוון ש$D$ חופשי מריבועים, $x^2 - Dy^2 \neq 0$. לכן $a \cdot (\frac{1}{N(a)}\bar{a}) = 1$. וכן,
$$\frac{\bar{a}}{N(a)} = \frac{x}{N(a)} + \frac{y}{N(a)}\sqrt{D} \in \mathbb{Q}[\sqrt{D}].$$

כעת, נוכיח שזהו אכן שדה השברים של $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$.

מצד אחד, ברור ש$\mathbb{Q}$ מוכל בשדה השברים של $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$, ולכן $\mathbb{Q}[\sqrt{D}] \subseteq q\left(\mathbb{Z}[\sqrt{D}]\right)$.

מצד שני, $\mathbb{Z}[\sqrt{D}] \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$ ולכן $q\left(\mathbb{Z}[\sqrt{D}]\right) \subseteq q\left(\mathbb{Q}[\sqrt{D}]\right) = \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$. לכן, $q\left(\mathbb{Z}[\sqrt{D}]\right) = \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$.

2. יהי $R$ חוג שלמים ריבועיים, ויהיו $x, y \in R$ איברים חברים. הוכיחו ש$N(x) = \pm N(y)$.
פתרון:

יהיו $x, y$ איברים חברים. אזי קיים $u$ הפיך כך ש$x = yu$. בפרט, $N(x) = N(yu) = N(y)N(u)$ מכפליות הנורמה. אבל הנורמה של איבר הפיך היא $\pm 1$. לכן $N(x) = \pm N(y)$.

3. מצאו את כל החברים של 17 בחוג $\mathcal{O}_{-2}$.
פתרון:

נזכיר שאיבר $a$ הוא חבר של 17 אמ"ם קיים איבר הפיך $u$ כך ש$a = 17u$. לכן מספיק למצוא את כל האיברים ההפיכים בחוג $\mathcal{O}_{-2}$. איבר בחוג הזה הוא מהצורה $x + y\sqrt{-2}$. הוא הפיל אמ"ם הנורמה שלה היא $\pm 1$. הנורמה של $x + y\sqrt{-2}$ היא $x^2 + 2y^2$. זה אף פעם לא שווה $-1$. וקל לראות שווה 1 רק עבור $\pm 1$. לכן החברים של 17 הם רק $\pm 17$.

4. קבעו האם $3 + \sqrt{-5}$ פריק בחוג $\mathcal{O}_{-5}$.
פתרון:

ראשית, נשים לב ש$N(3 + \sqrt{-5}) = 14$. אם $3 + \sqrt{-5} = xy$ פירוק אמיתי, כלומר ש$x$ ו$y$ אינם הפיכים, אז $N(x)N(y) = 14$ וכן אף אחד לא מנורמה $\pm 1$ (כי אחרת היה הפיך), לכן אחד מנורמה $\pm 2$, ואחד מנורמה $\pm 7$. יהי $x + y\sqrt{-5} \in \mathcal{O}_{-5}$. הנורמה שלו

היא $x^2+5y^2$. נראה שהנורמה לא יכולה לצאת $\pm 2$. ובכן, נניח ש$x^2+5y^2=\pm 2$. אז מודולו 5 נקבל $x^2 \equiv 2 \vee 3 \mod 5$. נשים לב שהמספרים הריבועיים היחידים ב$\mathbb{Z}_5$ הם $1,4$. לכן לא קיים איבר עם נורמה $\pm 2$. מכאן ש$3+\sqrt{-5}$ לא פריק.

5. הוכיחו: מספר ראשוני $p\in\mathbb{Z}$ הוא פריק ב$\mathcal{O}_D$ אמ"ם יש איבר $x\in\mathcal{O}_D$ כך ש$N(x)=\pm p$.
פתרון:

ראשית, נניח שקיים $x$ עם נורמה $\pm p$. אז $x$ לא הפיך (כי הנורמה שלו שונה מ$\pm 1$), וכן $\bar{x}$ לא הפיך (מאותה סיבה), ונשים לב $p=x\bar{x}(\pm 1)$. לכן $p$ פריק.

מצד שני, נניח ש$p$ פריק. קיימים $x,y$ לא הפיכים כך ש $p=xy$. לכן $N(x)N(y)=N(xy)=N(p)=p^2$. אבל $N(x)\neq\pm 1$ כי הוא לא הפיך. לכן $N(x)=\pm p$.