פתרון בוחן 3 במתמטיקה בדידה 2
83-118 סמסטר ב׳ תשע״ה

הוראות: ענו על **שלוש שאלות** מתוך ארבע. נקודה אחת מקבלים במתנה.
כתבו בכתב ברור בעט כחול או שחור. אין להשתמש בכל חומר עזר, גם לא במחשבון. **משך הבוחן**: 90 דקות.

שאלה 1. (33 נק׳) בהטלה של עשר קוביות (בקוביה מופיעים המספרים 1 עד 6), מה הסיכוי שכל המספרים מופיעים?

פתרון. בקיצור: נגדיר את A_i להיות הקבוצה שבה המספר i לא מופיע באף אחת מן ההטלות. כלומר הטלנו עשר פעמים והיו 5 אפשרויות לכל פעם: $|A_i| = 5^{10}$. עבור $A_i \cap A_j$ שני מספרים שונים לא מופיעים בהטלות ולכן$|A_i \cap A_j| = 4^{10}$, וכך הלאה לגבי שאר החיתוכים. באופן דומה לשאלות בתרגיל בית 7, מספר רצפי ההטלות האפשריים הם:

$$\begin{aligned}\left|\bigcap_{i=1}^{6} A_i^c\right| &= \left|\left(\bigcup_{i=1}^{6} A_i\right)^c\right| = |U| - \left|\bigcup_{i=1}^{6} A_i\right| \\ &= |U| - \sum_{i=1}^{6} |A_i| + \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots \\ &= \binom{6}{0}6^{10} - \binom{6}{1}5^{10} + \binom{6}{2}4^{10} - \binom{6}{3}3^{10} + \dots + \binom{6}{6}0^{10}\end{aligned}$$

ולקבלת הסיכוי יש לחלק מספר זה בגודל הקבוצה האוניברסלית $|U| = 6^{10}$.

שאלה 2. (33 נק׳) הוכיחו שלכל n טבעי קיים מספר המורכב מהספרות 3 ו-0 בלבד (בהצגה עשרונית) המתחלק ב-n.

פתרון. נביט על סדרת המספרים $\{3, 33, 333, 3333, 33333, \dots\}$. נבחר $n+1$ אברים מתוכה. נביט על הקבוצה הנוצרת על ידי הפעלת מודולו n עליה. אחרי הפעלת מודולו האפשרויות לשארית החלוקה ב n הן $0, 1, 2 \dots, n-1$. כלומר $n+1$ אברי קבוצה ל n שאריות אפשריות (אחרי חלוקה ב n). לפי עקרון שובך היונים, לשניים מן המספרים יש את אותה שארית בחלוקה ב n. ההפרש בין שני מספרים אלו הוא מספר עם ספרות שהן 3 או 0 בלבד (מקבוצת המספרים שבחנו נקבל מספר שמתחיל ברצף כלשהו של 3 ואחר רצף כלשהו של 0). בנוסף, שארית החלוקה של ההפרש ב-n תהיה אפס, כלומר הוא כפולה של n.

שאלה 3. ענו בעזרת עקרון הכלה-הדחה על הסעיפים הבאים:

1. (16 נק') כמה מספרים שלמים בין 1 לבין 100 כולל הם כפולות של 2 או של 3?

2. (17 נק') מה הוא **הסכום** של המספרים השלמים בין 1 לבין 100 כולל שהם כפולות של 2 או של 3?
רמז: נוסחה לסכום סדרה חשבונית $a_1, a_2, \ldots, a_n$ היא $\frac{(a_1+a_n)n}{2}$.

פתרון. טיפ למי שלא בטוח בזמן המבחן: זו מסוג השאלות שאפשר לוודא גם "ידנית". הרי דרך הפתרון נכונה גם אם היינו משתמשים ב-n במקום ב-100. כדי לוודא שמקבלים תשובה הגיונית אפשר לנסות להציב $n = 10$ או $n = 20$ ולחשב את הפתרון על ידי מעבר על קבוצת המספרים $\{1, \ldots, n\}$.

1. תהי A הקבוצה של המספרים בין 1 לבין 100 כולל שהם כפולה של 2. מתקיים $|A| = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor = 50$. תהי B הקבוצה של המספרים בין 1 לבין 100 כולל שהם כפולה של 3. מתקיים $|B| = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33$. נשים לב שמספרים שמתחלקים הן ב-2 והן ב-3 הם המספרים המתחלקים ב-6, שהם המספרים בחיתוך $A \cap B$. מתקיים $|A \cap B| = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$. בשאלה אנו נדרשים למצוא את $|A \cup B|$, ולפי עקרון הכלה-הדחה מתקיים

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 50 + 33 - 16 = 67$$

2. בעקרון הכלה-הדחה ניתן להשתמש לא רק למציאת מספר האיברים בקבוצה, אלא גם למציאת האיברים עצמם. בפרט, עם הסימונים מן הסעיף הקודם, מתקיים כי סכום האיברים בקבוצה $A \cup B$ שווה לסכום האיברים בקבוצה A ועוד סכום האיברים בקבוצה B פחות סכום האיברים בקבוצה $A \cap B$. כלומר הסכום המבוקש הוא

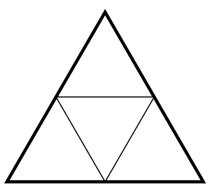
$$\frac{(2+100)\cdot 50}{2} + \frac{(3+99)\cdot 33}{2} - \frac{(6+96)\cdot 16}{2} = \frac{102 \cdot 67}{2} = 3417$$

שאלה 4. (אין קשר בין הסעיפים בשאלה)

1. (16 נק') יהי משולש שווה צלעות עם צלע באורך 2. הוכיחו שאם בוחרים חמש נקודות כלשהן בתוכו, אז יש שתי נקודות שהן לכל היותר במרחק 1.
רמז: אפשר להוסיף קווי עזר בתוך המשולש. מה הוא המרחק המקסימלי של שתי נקודות בתוך משולש שווה צלעות?

2. (17 נק') הוכיחו שאם בוחרים שישה מספרים מתוך $\{1, 2, \ldots, 10\}$, אז יש בינהם זוג מספרים שסכומם 11.

פתרון. 1. ראו גם משפט 4.5.7 בעמוד 143 בספר. נחבר את אמצעי הצלעות במשולש כדי לקבל חלוקה לארבעה משולשים שווי צלעות עם צלע באורך 1, כמו בציור:



לפי עקרון שובך היונים, שבו הנקודות הן היונים והמשולשים הקטנים הם השובכים, יש משולש קטן שבו (או על שפתו) יש שתי נקודות לפחות. בתוך משולש שווה צלעות עם צלע באורך 1 המרחק המירבי בין שתי נקודות הוא 1.

2. ישנם חמישה זוגות של מספרים בין 1 לבין 10 שסכומם 11: $\{1,10\}$, $\{2,9\}$, $\{3,8\}$, $\{4,7\}$ ו-$\{5,6\}$. לפי עקרון שובך היונים, אם ששת המספרים שנבחרו הם היונים וחמשת הזוגות הנ"ל הם שובכים, אז יהיה שובך אחד לפחות שבו שתי יונים. כלומר זוג של מספרים שסכומם 11.

בהצלחה!