מבחן בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 (89-132)
פתרון מועד ב' (03.03.16)

מרצים: לואי פולב, פרופ' מיכאל כץ

מתרגלים: ויקטוריה בליזניאבסקי, דר' מנחם שלוסברג

משך המבחן הינו שלוש שעות. יש לענות על <u>כל</u> השאלות 1-5.

מותר השימוש ב**מחשבון פשוט**. כל חומר עזר פרט למחשבון– אסור.

שימו לב: עליכם לנמק היטב כל תשובה!

<u>שאלה 1</u> (15 נקודות)

הוכיחו את המשפט הבא:

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ מתכנס עבור $p>1$ ומתבדר עבור $p\le 1$.

<u>הוכחה</u>

[<u>ניקוד</u>: 2 נקודות לכל אחד מהסעיפים א,ב,ג,ד, ו-7 נקודות עבור סעיף ה'.]

א. אם $p=1$ אז זהו הטור ההרמוני והוא מתבדר.

ב. אם $0<p<1$ אז $\frac{1}{n^p}\le\frac{1}{n}$ (כי $n\ge n^p$) לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכן לפי מבחן ההשוואה עם הטור ההרמוני נקבל ש- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ מתבדר.

ג. אם $p<0$ אזי $\frac{1}{n^p}\to\infty$ ולכן לא מתקיים תנאי הכרחי להתכנסות טור, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ מתבדר.

ד. אם $p=0$ נקבל טור של $1+1+1+\ldots$ והוא מתבדר לאינסוף.

ה. אם $p>1$ נתבונן ב S_{2K+1} עבור $K\in\mathbb{N}^*\setminus\mathbb{N}$:

$$S_{2K+1}=\sum_{n=1}^{2K+1}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{(2K+1)^p}=1+\sum_{i=1}^{K}\frac{1}{(2i)^p}+\sum_{i=1}^{K}\frac{1}{(2i+1)^p}$$

$$=1+\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{1}{(2i)^p}+\frac{1}{(2i+1)^p}\right)\le 1+\sum_{i=1}^{K}\frac{2}{(2i)^p}=1+\sum_{i=1}^{K}\frac{2}{2^p i^p}$$

$$=1+2^{1-p}\sum_{i=1}^{K}\frac{1}{i^p}=1+2^{1-p}S_K\le 1+2^{1-p}S_{2K+1}$$

המעבר האחרון מתקיים בגלל ש- $S_K \le S_{2k+1}$ וזאת כיוון שסדרת הסכומים החלקיים של טור חיובי היא עולה. לכן:

$$S_{2K+1} \le 1+2^{1-p}S_{2K+1} \Rightarrow S_{2K+1}\left(1-2^{1-p}\right) \le 1 \Rightarrow S_{2K+1} \le \frac{1}{1-2^{1-p}}.$$

S_{2K+1} סופי (מה שאומר שסדרת הסכומים החלקיים חסומה) ולכן, לפי משפט, סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת ומכאן שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ מתכנס.

<u>שאלה 2</u> (12 נקודות)

הוכיחו כי הסדרה הרקורסיבית הבאה מתכנסת וחשבו את גבולה:

הסדרה מוגדרת על-ידי הכלל $a_1=10,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$.

<u>פתרון</u>

[<u>ניקוד</u>: 2 נקודות על חישוב נכון של הגבול; 5 נקודות על מונוטוניות ו-5 נקודות על חסימות.]

ננחש תחילה את גבול הסדרה.

נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ונקבל:

$$L=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{2}\left(L+\frac{1}{L}\right).$$

נפתור את המשוואה $L=\frac{1}{2}\left(L+\frac{1}{L}\right)$ ביחס ל- L ונקבל $L^2-1=0$ ולכן $L=1$ או $L=-1$, אבל מאחר וכל אברי הסדרה חיוביים הגבול האפשרי היחיד הינו $L=1$.

כעת נוכיח שהסדרה אכן מתכנסת:

1. **נוכיח שהסדרה חסומה מלרע ע"י 1:**

$$a_{n+1}-1=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)-1=\frac{1}{2}\left(\frac{a_n^2-2a_n+1}{a_n}\right)=\frac{(a_n-1)^2}{2a_n}\ge 0$$ ולכן $a_{n+1}\ge 1$ לכל n טבעי.

2. **נוכיח מונוטוניות:**

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)-a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1-a_n^2}{a_n}\right)\le 0$$, כי הוכחנו ש- $a_n\ge 1$ ולכן הסדרה מונוטונית יורדת.

בגלל שהסדרה יורדת היא חסומה מלעיל ע"י האיבר הראשון שלה, כלומר $1 \le a_n \le 10$ ולכן הסדרה חסומה.

לסיכום הוכחנו שהסדרה מונוטונית יורדת וחסומה ולכן לפי משפט מתכנסת.

לפי החישוב שעשינו קודם מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

שאלה 3

א. (20 נקודות) יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ ונניח שהפונקציה $f(x) = \begin{cases} e^x & x \le 1 \\ ax+b & x > 1 \end{cases}$ רציפה וגזירה בנקודה $x=1$. מצאו את a, b (נמקו היטב!).

ב. (10 נקודות) מצאו את $\frac{dy}{dx}$ בנקודה $(3,2)$ עבור העקומה $y^4 + 5y^2 = x^4 - 5x^2$.

פתרון

סעיף א

נתון שהפונקציה רציפה ב-$x=1$ ולכן הגבולות החד-צדדיים בנקודה זו קיימים ושווים. כלומר: $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x)$. נציב את הפונקציות המתאימות ונקבל: $\lim\limits_{x\to1^-} e^x = \lim\limits_{x\to1^+} (ax+b)$ ולכן $a+b=e$.

נתון שהפונקציה גזירה בנקודה $x=1$. נגזרתה היא $f'(1) = \underset{0\ne\Delta x\approx0}{st}\left(\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\right)$.

עבור $\Delta x < 0$ מקבלים:

$$\underset{0>\Delta x\approx0}{st}\left(\frac{e^{1+\Delta x}-e}{\Delta x}\right) = \underset{0>\Delta x\approx0}{st}\left(\frac{e\left(e^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}\right) = \underset{0>\Delta x\approx0}{st}(e)\cdot\underset{0>\Delta x\approx0}{st}\left(\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right) = e\cdot1 = e.$$

עבור $\Delta x > 0$ מקבלים:

$$\underset{0<\Delta x\approx0}{st}\left(\frac{a(1+\Delta x)+b-e}{\Delta x}\right) = \underset{0<\Delta x\approx0}{st}\left(\frac{a+b-e+a\Delta x}{\Delta x}\right).$$

מכיוון ש- $a+b=e$ מתקיים: $\underset{0<\Delta x\approx0}{st}\left(\frac{a+b-e+a\Delta x}{\Delta x}\right) = \underset{0<\Delta x\approx0}{st}\left(\frac{a\Delta x}{\Delta x}\right) = a$.

מקיום הנגזרת נסיק כי $a=e$ ומהתנאי $a+b=e$ נסיק כי $b=0$.

<u>סעיף ב</u>

$$\frac{d\left(y^4+5y^2\right)}{dx}=\frac{d\left(x^4-5x^2\right)}{dx}$$
$$4y^3\frac{dy}{dx}+10y\frac{dy}{dx}=4x^3-10x$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x^3-10x}{4y^3+10y}$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,2)}=1\frac{1}{2}$$

<u>שאלה 4</u>

קבעו לגבי כל טור אם הוא מתכנס בתנאי, מתכנס בהחלט או מתבדר (הוכיחו את תשובתכם).

א. (7 נקודות) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{\left(\ln 3\right)^n}$.

ב. (7 נקודות) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{0.3}n}$.

ג. (7 נקודות) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n\ln n}{n}$.

<u>פתרון</u>

<u>סעיף א</u>

נשתמש במבחן השורש. מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^4}{\left(\ln 3\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^4}}{\sqrt[n]{\left(\ln 3\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^4}{\ln 3}=\frac{1}{\ln 3}<1$$

ולכן הטור <u>מתכנס</u>.

<u>סעיף ב</u>

האיבר הכללי של הטור מהווה סדרה חיובית יורדת, ולכן ניתן להשתמש במבחן העיבוי. הטור המקורי מתכנס אם ורק אם הטור $\sum 2^k\frac{1}{2^k\left(\ln 2^k\right)^{0.3}}$ מתכנס. מתקיים:

$\sum 2^k \frac{1}{2^k\left(\ln 2^k\right)^{0.3}} = \sum \frac{1}{\left(k\ln 2\right)^{0.3}} = \sum\left(\frac{1}{k^{0.3}}\cdot\frac{1}{\ln^{0.3} 2}\right) = \frac{1}{\ln^{0.3} 2}\sum\frac{1}{k^{0.3}}$. אבל הטור $\sum\frac{1}{k^{0.3}}$ מתבדר ולכן גם $\frac{1}{\ln^{0.3} 2}\sum\frac{1}{k^{0.3}}$ מתבדר. מכאן שהטור המקורי <u>מתבדר</u>.

<u>סעיף ג</u>

נבדוק התכנסות בהחלט, כלומר התכנסות של הטור $\sum\frac{\ln n}{n}$. הסדרה $\frac{\ln n}{n}$ היא סדרה חיובית ויורדת ולכן ניתן להשתמש במבחן העיבוי. הטור $\sum\frac{\ln n}{n}$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum 2^k\frac{\ln 2^k}{2^k}$ מתכנס. מתקיים $\sum 2^k\frac{\ln 2^k}{2^k} = \sum \ln 2^k = \sum k\ln 2 = \ln 2\sum k$, וזהו טור מתבדר. לכן $\sum\frac{\ln n}{n}$ מתבדר, ומכאן שהטור המקורי <u>אינו מתכנס בהחלט</u>.

נבדוק התכנסות בתנאי. הסדרה $\frac{\ln n}{n}$ היא סדרה יורדת ומתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$ ולכן לפי משפט לייבניץ הטור $\sum\frac{(-1)^n\ln n}{n}$ מתכנס.

לסיכום, הטור המקורי <u>מתכנס בתנאי</u>.

<u>שאלה 5</u>

א. (15 נקודות) נניח ש- f היא פונקציה גזירה ב- $\mathbb{R}$ המקיימת $f'(x)\ge\frac{3}{2}$ לכל $x\in\mathbb{R}$. נתון ש- $f(1)=2$. הוכיחו ש- $f(5)\ge 8$.

ב. (10 נקודות) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המקיימת $f(2x)=2f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$. הוכיחו שאם קיים $L\in\mathbb{R}$ עבורו $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=L$, אזי $L=0$.

<u>פתרון</u>

<u>סעיף א</u>

נתבונן בקטע $[1,5]$. מכיוון שהפונקציה גזירה (ולכן רציפה) בכל $\mathbb{R}$, היא מקיימת את תנאי משפט Lagrange בקטע זה. לכן קיימת נקודה $c\in(1,5)$ עבורה מתקיים: $f'(c)=\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{f(5)-2}{4}$.

מכיוון ש- $f'(c)\ge\frac{3}{2}$ מתקיים: $\frac{f(5)-2}{4}\ge\frac{3}{2}$ ולכן $f(5)\ge 8$ כנדרש.

<u>סעיף ב</u>

תחילה נשים לב שמהנתון $\lim_{x\to 0} f(x) = L$ נובע שלכל אינפיניטסימל ε מתקיים $f(\varepsilon) \approx L$. כעת, יהי $\Delta x \approx 0$, ולכן גם $2\Delta x$ הוא אינפי'. נקבל, אם כן, ש-$f(\Delta x) \approx L$ (ולכן $2f(\Delta x) \approx 2L$) וגם ש-$f(2\Delta x) \approx L$. מכיוון שלפי הנתון מתקיים $f(2\Delta x) = 2f(\Delta x)$, מטרנזיטיביות היחס $\approx$ נסיק כי $L \approx 2L$, והיות ומדובר במספרים ממשיים נקבל $L = 2L$. לכן $L = 0$ כנדרש.

<u>שאלה בונוס</u> (7 נקודות)

יהיו $x_0, a \in \mathbb{R}$ ותהי f פונקציה גזירה באינטרוול (x_0, ∞) המקיימת $f'(x) \geq a > 0$ לכל $x > x_0$.

הוכיחו ש- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

<u>פתרון</u>

נרצה להראות שלכל H אינסופי חיובי מתקיים ש-$f(H)$ אינסופי חיובי.

יהי $x_1 \in (x_0, \infty)$ כלשהו. אזי לכל $x_1 < x$ הפונקציה מקיימת את תנאי משפט Lagrange בקטע $[x_1, x]$ ולכן קיים $c_x \in (x_1, x)$ עבורו $f'(c_x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$. מהנתון על הנגזרת נקבל $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq a$ ולכן $f(x) \geq a(x - x_1) + f(x_1)$.

עד כאן הראנו שלכל $x > x_1$ מתקיים $f(x) \geq a(x - x_1) + f(x_1)$, ולכן, לפי עקרון ההעברה, הטענה מתקיימת גם לכל H אינסופי חיובי (שכן $H > x_1$), כלומר, $f(H) \geq a(H - x_1) + f(x_1)$. כעת, מכיוון ש-$a > 0$, המספר $a(H - x_1)$ הוא אינסופי חיובי ולכן גם $a(H - x_1) + f(x_1)$ אינסופי חיובי, ומכאן מקבלים את הדרוש.

בהצלחה בהמשך השנה!