<u>תרגיל 2.6</u>

מצא את טור פורייה בקטע $[-\pi,\pi]$ של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x|x|$

ב. $f(x)=\pi^2-x^2$

ג. $f(x)=\sin\frac{x}{2}$

<u>פתרון</u>

א.

נציג את הפונקציה הנתונה בצורה

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le\pi \\ -x^2, & -\pi\le x<0\ . \end{cases}$$

פונקציה זו היא פונקציה אי-זוגית. לכן טור פורייה שלה בקטע $[-\pi,\pi]$ הוא

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\ ,$$

כאשר

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,dx,\qquad n=1,2,3,\ldots\ .$$

לחישוב האינטגרל נשתמש בהצבה

$$x=\frac{y}{n},\ \ dx=\frac{dy}{n},\ \ 0\le y\le\pi n\ .$$

באמצעות הצבה זו נעלם הפרמטר n מתחת לאינטגרל. דהיינו

$$b_n=\frac{2}{\pi n^3}\int_0^{\pi n}y^2\sin y\,dy,\qquad n=1,2,3,\ldots\ .$$

לחישוב האינטגרל נשתמש באינטגרציה בחלקים בצורתה המקורית:

$$\int_a^b u(x)\,dv(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\,du(x)\ .$$

בדרך זו נקבל

$$\int_0^{n\pi}y^2\sin y\,dy=\int_0^{n\pi}y^2\,d(-\cos y)=$$

$$=\left(y^2(-\cos y)\Big|_0^{n\pi}+\int_0^{n\pi}\cos y\,d(y^2)\right)=-n^2\pi^2\cos n\pi+2\int_0^{n\pi}y\cos y\,dy$$

$$=-n^2\pi^2(-1)^n+2\int_0^{n\pi}y\,d(\sin y)=n^2\pi^2(-1)^{n+1}+2y\sin y\Big|_0^{n\pi}-2\int_0^{n\pi}\sin y$$

$$=n^2\pi^2(-1)^{n+1}+2\cos y\Big|_0^{n\pi}=n^2\pi^2(-1)^{n+1}+2(-1)^n-2\ .$$

יב לביטוי של b_n את ערך האינטגרל, נקבל

$$b_n=2\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}+\frac{4}{\pi n^3}\left((-1)^n-1\right),\qquad n=1,2,3,\ldots\ .$$

ר פורייה של הפונקציה הנתונה בקטע $[-\pi,\pi]$ הוא

$$x|x|\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}+\frac{4}{\pi n^3}\left((-1)^n-1\right)\right)\sin nx\ .$$

יה $f(x)=\pi^2-x^2$ היא פונקציה זוגית. לכן טור פורייה שלה הוא

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\ ,\qquad x\in[-\pi,\pi],$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\pi^3-\frac{\pi^3}{3}\right)=\frac{4\pi^2}{3}\ ,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos nx\,dx$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\cos nx\,dx-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{2\pi}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx,\qquad n=1,2,3,\ldots\ .$$

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}, \quad n = 1,2,3,\dots \ .$$

לכן טור פורייה של הפונקציה הנתונה בקטע $[-\pi,\pi]$ הוא

$$\pi^2 - x^2 \sim \frac{2\pi^2}{3} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx \ .$$

ג.

הפונקציה $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ היא פונקציה אי-זוגית. לכן טור פורייה שלה בקטע $[-\pi,\pi]$ הוא

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx ,$$

כאשר

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\sin nx\,dx \ .$$

מכאן בשימוש בנוסחה הטריגונומטרית

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$ נקבל

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos\left(\frac{2n-1}{2}\right)x - \cos\left(\frac{2n+1}{2}\right)x\right)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}}{2n-1} - \frac{\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}}{2n+1}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} - \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{8}{\pi}\frac{n(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \frac{8}{\pi}\frac{n(-1)^{n+1}}{4n^2-1}, \qquad n = 1,2,3,\dots \ .$$

לכן טור פורייה של הפונקציה הנתונה בקטע $[-\pi,\pi]$ הוא

$$\sin\frac{x}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi}\frac{n(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\sin nx \ .$$

...גיל 2.7 44

...א את טור פורייה בקטע $[-\pi,\pi]$ של הפונקציה

$$f_p(x) = \cos px$$

...ר $0 \le p \le \pi$.

...ו

...הפרמטר p הוא מספר שלם כלומר $p=0, p=1, p=2, p=3$, אזי טור פורייה

...פונקציה $f_p(x)$ מתלכד עם הפונקציה עצמה. נניח כי p אינו שלם. היות ו-

...f_p היא פונקציה זוגית, טור פורייה שלה בקטע $[-\pi,\pi]$ הוא

$$f_p(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx ,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_p(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos px\,dx = \frac{2\sin p\pi}{p\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_p(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos px\cos nx\,dx \ .$$

...שימוש בנוסחה $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$, נקבל

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos px\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos(p+n)x + \cos(p-n)x\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(p+n)\pi}{p+n} + \frac{\sin(p-n)\pi}{p-n}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n\sin p\pi}{p+n} + \frac{(-1)^n \text{s}\dots}{p\dots}\right.$$

$$= \frac{2p(-1)^n\sin p\pi}{\pi\left(p^2-n^2\right)}, \qquad n = 1,2,3,\dots \ .$$

...ל הפונקציה הנתונה בקטע $[-\pi,\pi]$ עבור $0 \le p \le \pi$, p אינו שלם, הוא

$$\cos px \sim \frac{2\sin p\pi}{p\pi} + \frac{2p}{\pi}\sin p\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^2-n^2}\cos nx \ .$$

44

<u>תרגיל 2.8</u>

תהי $f \in E$, ויהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

הטור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$. נגדיר את שתי הפונקציות

$$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

מצא את טור פורייה של g ואת טור פורייה של h בקטע $[-\pi,\pi]$.

<u>פתרון</u>

נשים לב כי

$$g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x)$$

$$h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -h(x)$$

כלומר $g(x)$ היא פונקציה זוגית ו- $h(x)$ היא פונקציה אי- זוגית. מהגדרת הפונקציות $g(x),h(x)$ נובע כי

$$g(x)+h(x) = f(x)$$

מכאן, בשימוש בתכונת איפוס האינטגרלים של פונקציות אי-זוגיות בקטע סימטרי, נקבל

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\,dx, \quad n=0,1,2,\dots \ ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\sin nx\,dx, \quad n=1,2,3,\dots \ .$$

לכן טורי פורייה של $g(x)$ ו- $h(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ הם

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \ ,$$

$$h(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \ .$$

ן להסיק מכאן כי טור פורייה של $g(x)$ הוא החלק הזוגי של טור פורייה של $f(x)$. ור פורייה של $h(x)$ הוא החלק האי-זוגי של טור פורייה של $f(x)$. מסקנה זו מעת מאוד טבעית לאור העובדה שהפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ מהוות בהתאמה את לק הזוגי ואת החלק האי-זוגי של $f(x)$.

רה: תוך כדי פתרון התרגיל, הוכחנו גם כי כל פונקציה בקטע סימטרי ניתנת להצגה כום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית. הקוראים מתבקשים להוכיח את יחידות צגה הזאת.

<u>יל 2.9</u> 46

$f \in E$. מצא את טור פורייה המרוכב של $\mathrm{Re} f$ בשימוש בטור פורייה המרוכב f.

ן

פורייה המרוכב של הפונקציה $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ הוא

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \ ,$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \quad n=0,\pm1,\pm2,\dots \ .$$

d מקדמי פורייה המרוכבים של הפונקציה $\mathrm{Re} f$ בקטע $[-\pi,\pi]$, כלומר

$$\mathrm{Re} f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx} \ ,$$

$$d_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re} f(x)\, e^{-inx}dx, \quad n=0,\pm1,\pm2,\dots \ .$$

$\mathrm{Re} f(x) = \dfrac{f(x)+\overline{f(x)}}{2}$, מקבלים

$$d_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)+\overline{f(x)}}{2} e^{-inx}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}e^{-inx}d\right.$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(x)e^{inx}}dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx+\overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx}\right)=\frac{c_n+\overline{c_{-n}}}{2}\ ,\quad n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots\ .$$

לכן טור פורייה המרוכב של $\operatorname{Re} f$ בקטע $[-\pi,\pi]$ הוא

$$\operatorname{Re} f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{c_n+\overline{c_{-n}}}{2}e^{inx}\ .$$

<u>תרגיל 2.10</u> 76

מצא את טור פורייה המרוכב של הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}0\ , & -\pi\le x<0\\ e^{ix}\ , & 0\le x<\pi\ .\end{cases}$$

<u>פתרון</u>

טור פורייה המרוכב של הפונקציה $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ הוא

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}\ ,$$

כאשר

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{x}e^{-inx}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{(1-in)x}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{(1-in)x}}{1-in}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{e^{(1-in)\pi}-1}{2\pi(1-in)}=\frac{\left(e^{\pi}e^{-in\pi}-1\right)(1+in)}{2\pi\left(1+n^2\right)}$$

$$=\frac{\left(e^{\pi}(\cos n\pi-i\sin n\pi)-1\right)(1+in)}{2\pi\left(1+n^2\right)}=\frac{\left(e^{\pi}(-1)^n-1\right)(1+in)}{2\pi\left(1+n^2\right)},\ n=0,\pm1,\pm2,\dots\ .$$

לכן טור פורייה המרוכב של הפונקציה $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ הוא

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\left(e^{\pi}(-1)^n-1\right)(1+in)}{2\pi\left(1+n^2\right)}e^{inx}\ .$$

<u>גיל 2.11</u>

נתון טור פורייה המרוכב של הפונקציה $f(x)\in E$ בקטע $[-\pi,\pi]$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{inx}\ .$$

ב את טורי פורייה המרוכבים עבור הפונקציות

$$f(\bar{x}),\overline{f(x)},f(-x)\ .$$

ו

ו-x הוא מספר ממשי, מתקיים $f(\bar{x})=f(x)$ ולכן טור פורייה המרוכב של

קציה $f(\bar{x})$ בקטע $[-\pi,\pi]$ זהה לטור פורייה המרוכב של $f(x)$, כלומר

$$f(\bar{x})\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}\ ,$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx\ ,\qquad n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots\ .$$

פורייה המרוכבים של $\overline{f(x)}$ הם

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(x)}e^{-inx}dx=\overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{inx}dx}=\overline{c_{-n}}\ ,\qquad n=0,\pm1,\pm2,\dots$$

ורייה המרוכב של $\overline{f(x)}$ בקטע $[-\pi,\pi]$ הוא

$$\overline{f(x)}\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{c_{-n}}e^{inx}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{c_n}e^{-inx}\ .$$

ייה המרוכבים של $f(-x)$ הם

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(-x)e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{inx}dx=c_{-n}\ ,\quad n=0,\pm1,\pm2$$

המרוכב של $f(-x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ הוא

$$f(-x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{-n}e^{inx}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{-inx}\ .$$

<u>תרגיל 2.13</u>

מצא את טור פורייה המרוכב של e^x בקטע $[-\pi,\pi]$.

<u>פתרון</u>

מקדמי פורייה המרוכבים של e^x בקטע $[-\pi,\pi]$ הם

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{(1-in)x}dx=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{(1-in)x}}{1-in}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{(1-in)\pi}-e^{-(1-in)\pi}}{1-in}=\frac{1}{2\pi}\frac{\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)(-1)^n}{1-in}$$

$$=(-1)^n\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\frac{(1+in)}{1+n^2}\ .$$

לכן טור פורייה המרוכב של e^x בקטע $[-\pi,\pi]$ הוא

$$e^x\sim\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{(1+in)}{1+n^2}e^{inx}.$$

<u>תרגיל 2.14</u>

תהי $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$. הוכח את הטענות הבאות:

א. אם f מקבלת ערכים ממשיים בלבד, אזי $c_{-n}=\overline{c_n}$.

ב. אם f מקבלת ערכים מדומים בלבד, אזי $c_{-n}=-\overline{c_n}$.

ג. אם f ממשית וזוגית, אזי c_n ממשי.

ד. אם f ממשית ואי-זוגית, אזי c_n מדומה.

<u>פתרון</u>

א.

אם f מקבלת ערכים ממשיים בלבד, אזי $f(x)=\overline{f(x)}$. **בשימוש בהגדרת**

מקדמי פורייה נקבל

$$\overline{c_n}=\overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(x)}\,\overline{e^{-inx}}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{inx}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-i(-n)x}dx=c_{-n}\ .$$

...מר $c_{-n}=\overline{c_n}$ לכל n שלם.

f מקבלת ערכים מדומים בלבד, אזי $f(x)=-\overline{f(x)}$ ולכן

$$\overline{c_n}=\overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(x)}\,\overline{e^{-inx}}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(-f(x)\right)e^{inx}dx$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-i(-n)x}dx=-c_{-n}\ .$$

...ר $c_{-n}=-\overline{c_n}$ לכל n שלם.

...ח כי f ממשית וזוגית. אזי

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx-i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

...ות של f נובע כי האינטגרל האחרון באגף ימין שווה לאפס, בעוד האינטגרל

...ן באגף ימין הוא מספר ממשי. לכן c_n הוא מספר ממשי לכל n שלם.

...כי f היא פונקציה ממשית ואי-זוגית. אזי בביטוי של c_n הרשום לעיל, האינ-

...ראשון באגף ימין שווה לאפס, בעוד האינטגרל השני באגף ימין הוא מספר

...בל המקדם של אינטגרל זה הוא מספר מדומה, לכן c_n הוא מספר מדומה לכל

2....

$f(x)=1$... בקטע $[-\pi,\pi]$, ויהי

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

...ח של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

$$f(x+\pi)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

וטור פורייה של $f(x+\pi)-f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ הוא

$$f(x+\pi)-f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n-1\right)\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

או

$$f(x+\pi)-f(x)\sim(-2)\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k-1}\cos(2k-1)x+b_{2k-1}\sin(2k-1)x\,.$$

מכאן לפי שוויון פרסבל מקבלים

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x+\pi)-f(x)\right|^2dx=4\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{2k-1}\right|^2+\left|b_{2k-1}\right|^2.$$

<u>תרגיל 2.28</u>

לכל n טבעי נגדיר את הפונקציה

$$f_n(x)=1+\sum_{k=1}^{n}\cos kx-\sin kx$$

חשב את האינטגרל

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|f_n(x)\right|^2dx$$

<u>פתרון</u>

הפונקציה הנתונה היא פולינום טריגונומטרי ממעלה n. הפולינום הטריגונומטרי הזה הוא טור פורייה של הפונקציה המיוצגת על ידיו,כלומר מקדמי פורייה של הפונקציה $f_n(x)$ הם

$$a_0=2\,,$$

$$a_k=\begin{cases}1\ , & k=1,2,\dots,n\\ 0\ , & k=n+1,n+2,\dots\ ,\end{cases}$$

$$b_k=\begin{cases}-1\ , & k=1,2,\dots,n\\ 0\ , & k=n+1,n+2,\dots\ .\end{cases}$$

לפי שוויון פרסבל

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f_n(x)\right|^2dx=\frac{a_0^{\,2}}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^{\,2}+b_k^{\,2}\right)=2+2n=2(1+n)$$

ומכאן

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|f_n(x)\right|^2dx=2\pi(n+1)\,.$$

<u>2.29</u>

ויהי $f\in E[-\pi,\pi]$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

ורייה של f בקטע $[-\pi,\pi]$.

את הסכום

$$I=\frac{a_0^{\,2}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\,2}$$

$f(x)=e^x$.

$g(x)$ החלק הזוגי של $f(x)$, כלומר

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x\,.$$

פורייה של החלק הזוגי של $f(x)$ הוא החלק הזוגי של טור פורייה של $f(x)$.

$$\cosh x\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\,.$$

לפי משפט פרסבל נובע כי

$$\frac{a_0^{\,2}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\,2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cosh^2x\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cosh 2x}{2}dx=\frac{1}{2\pi}\left(x+\frac{1}{2}\sinh 2x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}(2\pi+\sinh 2\pi)=1+\frac{\sinh 2\pi}{2\pi}\,.$$

<u>2.30</u>

$$f(x)=\begin{cases}x\ , & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ \pi-x\ , & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$$

$\tilde{f}(x)$ ההרחבה האי-זוגית של f לקטע $[-\pi,\pi]$. מצא את טור פורייה של

בקטע $[-\pi,\pi]$.

פתרון

טור פורייה של $\tilde{f}(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ הוא

$$\tilde{f}(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\,,$$

כאשר

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx\right). \qquad (1)$$

בשימוש בהחלפת המשתנה $x-\pi=t$ מקבלים

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}t\sin n(t+\pi)\,dt \qquad (2)$$

$$=-(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin nt\,dt=(-1)^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx\,dx\,.$$

מ-(1), (2) נובע כי

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left(1+(-1)^{n+1}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx\,dx,\qquad n=1,2,3,\dots\,.$$

ברור כי

$$b_{2k}=0,\quad k=1,2,3,\dots\,. \qquad (3)$$

בשימוש באינטגרציה בחלקים נקבל ל-$k=1,2,3,\dots$

$$b_{2k-1}=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin(2k-1)x\,dx=-\frac{4}{\pi}x\frac{\cos(2k-1)x}{2k-1}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad (4)$$

$$+\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2k-1)x}{2k-1}dx=\frac{4\sin(2k-1)x}{\pi(2k-1)^2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)^2}\,.$$

מ-(3), (4) נובע כי טור פורייה של $\tilde{f}(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ הוא

$$\tilde{f}(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)^2}\sin(2k-1)x\,.$$

2.31 יל

ויהיו $f'\in E[0,\pi]$ וגם $f\in E[0,\pi]$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\quad.$$

הסינוסים של f, ו-

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

הקוסינוסים של f. מצא את ערכי הפונקציה

$$g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

נקודה x בקטע $[-\pi,\pi]$.

פונקציה

$$g_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,\qquad x\in(-\infty,\infty)\,.$$

שפט דיריכלה, הטור מתכנס עבור כל x ממשי. מהגדרת $g_1(x)$ נובע כי היא

ת את התנאים הבאים:

$g_1(x)=\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ בכל נקודה $x\in(0,\pi)$,

$g_1(x)=0$ בנקודות $x=0,x=\pi$,

$g_1(-x)=-g_1(x)$ לכל x,

$g_1(x+2\pi)=g_1(x)$ לכל x.

הפונקציה

$$g_2(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,\qquad x\in(-\infty,\infty)$$

לכל x ומקיימת את התנאים הבאים:

$g_2(x)=\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ בכל נקודה $x\in(0,\pi)$,

$g_2(\pi)=f(\pi^-)$, $g_2(0)=f(0$

$$S=\frac{2^6}{2^6-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^6}=\frac{64}{63}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^6}\,. \qquad (4)$$

מ-(3) ו-(4) נובע כי

$$S=\frac{64}{63}\cdot\frac{\pi^6}{15\cdot 64}=\frac{\pi^6}{15\cdot 63}=\frac{\pi^6}{945}$$

ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}\,.$$

ג.
בסעיף א' קיבלנו

$$x(\pi-x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin(2k-1)x,\quad x\in[0,\pi].$$

בנקודה $x=\frac{\pi}{2}$ שוויון זה הופך ל-

$$\frac{\pi^2}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}\,.$$

או, תוך שימוש בכך ש- $\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}=(-1)^{k+1}$ לכל k טבעי, נקבל

$$\frac{\pi^3}{32}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}\,.$$

<u>**תרגיל 2.33**</u> 76

א. פתח את הפונקציה $\cos x$ לטור סינוסים $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ בקטע $[0,\pi]$.

האם הטור מתכנס בכל נקודה בקטע $[-\pi,\pi]$?

ב. נגדיר את הפונקציה

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\,.$$

שרטט את הגרף של f בקטע $[-\pi,\pi]$.

<u>**פתרון**</u>
א.
טור הסינוסים של הפונקציה הנתונה בקטע $[0,\pi]$ הוא

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\,,$$

כאשר

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin nx\,dx,\qquad n=1,2,3,\dots\,.$$

עבור $n=1$ מקבלים

$$b_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{2}(1-1)=0$$

לכל $n>1$ מקבלים

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\,\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(n+1)x+\sin(n-1)x\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}-\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right)\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1}+\frac{(-1)^{n+1}-1}{n-1}\right)$$

$$=\frac{1-(-1)^{n+1}}{\pi}\,\frac{2n}{n^2-1}=\begin{cases}0, & n=2k-1\\ \frac{8}{\pi}\frac{k}{4k^2-1}, & n=2k,\quad k=1,2,3,\dots\,.\end{cases}$$

מהנוסחאות עבור b_n נובע כי טור הסינוסים של $\cos x$ בקטע $[0,\pi]$ הוא

$$\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-1}\sin 2kx\,.$$

לפי משפט דיריכלה טור זה מתכנס לכל $x\in(-\infty,\infty)$.

$$f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-1}\sin 2kx$$

$x\in(-\infty$. פונקציה זו מקיימת את התנאים הבאים:

$f(x)$ מוגדרת בכל התחום $-\infty<x<\infty$,

$f(x)=\cos$ לכל $x\in(0,\pi)$,

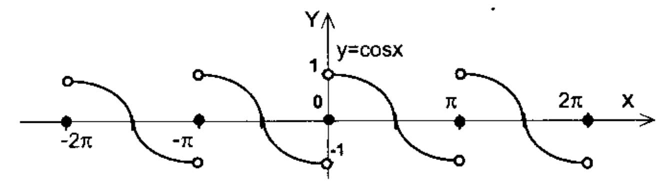
$f(0)=f(\pi)$,

f אי זוגית, כלומר $f(-x)=-f(x)$ לכל $x\in(-\infty,\infty)$,

f מחזורית במחזור 2π, כלומר $f(x+2\pi)=f(x)$ לכל

$x\in(-$.

הגרף באיור 2.5 משקף את התכונות הנ"ל.



איור 2.5

79

תרגיל 2.34

תהי $f(x)=|x|$, $-\pi \le x \le \pi$, ויהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos nx+b_n \sin nx\right]$$

טור פורייה של f בקטע $[-\pi,\pi]$.

א. חשב את a_n ו- b_n.

ב. הוכח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} na_n \sin nx$ מתכנס עבור כל ערך של x.

ג. לכל x ממשי נגדיר $g(x)=-\sum_{n=1}^{\infty} na_n \sin nx$. שרטט במדויק את הגרף של g בקטע $[-2\pi,2\pi]$.

ד. חשב את הסכומים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$.

פתרון

א.

מהגדרת מקדמי פורייה ומתכונת הזוגיות של $f(x)=|x|$, נקבל

$$b_n=0, \quad n=1,2,3,\ldots,$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2}=\pi ,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx, \quad n=1,2,3,\ldots .$$

מכאן בשימוש בהחלפת המשתנה $nx=t$ ובאינטגרציה בחלקים נקבל

$$a_n=\frac{2}{\pi n^2}\int_{0}^{n\pi} t\cos t\,dt=\frac{2}{\pi n^2}\int_{0}^{n\pi} t\,d(\sin t)=\frac{2}{\pi n^2}\left(t\sin t\Big|_0^{n\pi}-\int_{0}^{n\pi}\sin t\,dt\right)$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\cos t\Big|_0^{n\pi}=\frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k \\ -\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}, & n=2k-1\end{cases} \quad , \quad k=1,2,3,\ldots .$$

ב.

בשימוש בתוצאת סעיף א' נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n \sin nx=\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{4}{\pi}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} .$$

טור זה הוא טור פורייה של הפונקציה

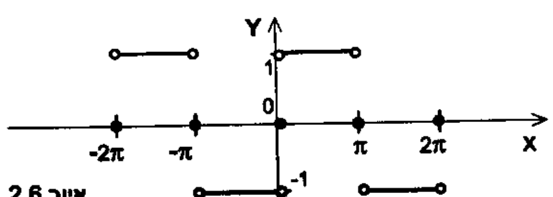
$$-\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & 0<x<\pi \\ 1, & -\pi<x<0 \\ 0, & x=0\end{cases}$$

י סקר תאוריה). היות ופונקציה זו מקיימת את תנאי משפט דיריכלה, **הטור מתכנס** **בור** כל x ממשי.

פונקציה $g(x)$ מחזורית במחזור 2π. **בשימוש בתוצאת סעיף ב' ובמשפט דיריכלה** **בל** כי היא מתלכדת עם הפונקציה $\operatorname{sgn} x$ בקטע $[-\pi,\pi]$, כלומר,

$$g(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\pi \\ -1, & -\pi<x<0 \\ 0, & x=0, x=\pm\pi .\end{cases}$$

של $g(x)$ בקטע $[-2\pi,2\pi]$ **מוצג באיור 2.6**



איור 2.6