

אלגברה לינארית - תרגול 6

23 בנובמבר 2020

1 מרחבים וקטוריים

נדבר על מרחב וקטורי V (קבוצה שאיבריה נקראים וקטורים) מעל שדה $\mathbb{F}$, עם חיבור וקטורים וכפל בסקלר.
תרגילים:

1. האם הבאים הינם מ"ו:

$$\text{(א) } V = \mathbb{R}^2 \text{ עם חיבור רגיל וכפל בסקלר: } \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ y \end{pmatrix}?$$

פתרון: נפריך את החוק שאומר $0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (תחפשו במתברת

$\vec{0}$ $(\forall v \in V : 0 \cdot v = \vec{0})$, כלל זה נובע מתכונות מ"ו, ואם הוא לא מתקיים אז
הקבוצה עם הפעולות איננה מ"ו. ואכן, אם ניקח $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ נקבל $0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(ב) } V = \mathbb{R}^3 \text{ עם חיבור } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a-1 \\ y-b \\ z+c \end{pmatrix} \text{ וכפל בסקלר}$$

רגיל.

$$\text{פתרון: נראה מי האיבר הניטרלי לחיבור: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{לכן דרוש: } \begin{cases} x+a-1=x \\ y-b=y \\ z+c=z \end{cases} \text{ ולכן: } \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \text{ האם החיבור חילופי? לא.}$$

אם ניקח $y = 1, b = 2$ לא משנה מה a, c, x, z נקבל

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a-1 \\ -1 \\ z+c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x+a-1 \\ 1 \\ z+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ c \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$$

ולכן זה לא מ"ו.

(ג) $V = \mathbb{R}^2$ עם חיבור רגיל וכפל: $\alpha * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 x \\ \alpha^2 y \end{pmatrix}$ פתרון: נראה שחוק הפילוג לא עובד:

$$(\alpha + \beta) * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta)^2 x \\ (\alpha + \beta)^2 y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \alpha^2 x \\ \alpha^2 y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta^2 x \\ \beta^2 y \end{pmatrix} = \alpha * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

1.1 תתי מרחבים וקטוריים

יהא V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$. תת-קבוצה $W \subseteq V$ תיקרא תת-מרחב וקטורי אם מתקיים:

1. $0_v \in W$

2. סגירות לחיבור: $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$

3. סגירות לכפל בסקלר: $u \in W, \alpha \in \mathbb{F} \Rightarrow \alpha u \in W$

ניתן לקצר את שני התנאים האחרונים לבדיקה אחת:

$$\forall u, v \in W, \alpha \in \mathbb{F} : u + \alpha v \in W$$

הערה: לכל מרחב וקטורי V מתקיים: $V, \{0\}$ הינם תתי-מרחבים. הם נקראים "הטריוויאליים".

הערה נוספת: אם $W \subset V$ ת"מ, אז נהוג לסמן $W \leq V$. תרגילים:

1. הוכיחו או הפריכו: W הוא תת-מרחב של V במקרים הבאים:

(א) $V = \mathbb{R}^{n \times n}, W = \{A \in V | A^t = A\}$. במילים: $\mathbb{R}^{n \times n}$ זה אוסף כל המטריצות הריבועיות $n \times n$. W זה קבוצת המטריצות הסימטריות.

פתרון: הוכחה: ראשית, $0_V \in W$ כי מטריצת האפס היא סימטרית. תהיינה

$A, B \in W$, כלומר, סימטריות ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. צריך להוכיח: $A + \alpha B \in W$.
ואכן, לפי כלל השחלוף:

$$(A + \alpha B)^t = A^t + (\alpha B)^t = A^t + \alpha \cdot B^t = A + \alpha B$$

(ב) $V = \mathbb{F}^{n \times n}$, $U = \{A \in V | A^t = -A\}$ במילים: U זה קבוצת המטריות האנטי-סימטריות.

פתרון: הוכחה: ראשית, $0_V \in U$ כי $0^t = 0 = -0$. תהינה $A, B \in U$, כלומר, אנטי-סימטריות. ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. צריך להוכיח: $A + \alpha B \in U$. ואכן:

$$(A + \alpha B)^t = A^t + (\alpha B)^t = A^t + \alpha \cdot B^t = -A + \alpha \cdot (-B) = -(A + \alpha B)$$

(ג) $V = \mathbb{F}^{n \times n}$, $W = \{A \in V | A^t = A\} \cup \{A \in V | A^t = -A\}$ כלומר, W זה אוסף המטריצות שהן סימטריות או אנטי-סימטריות.

פתרון: הפרכה: ראיתם בהרצאה: שאם $W, U \leq V$ אז $W \cup U \leq V$. כאן מספיק להראות שאף קבוצה לא מוכלת בשנייה. אנחנו נראה יותר מזה, ונסביר למה מקרה כזה גורם לאיחוד לא להיות ת"מ: יש מטריצה סימטרית שאיננה אנטי-סימטרית, למשל: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, ויש מטריצה אנטי-סימטרית שאיננה סימטרית, למשל: $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. כלומר, $A \in W \setminus U, B \in U \setminus W$. זה לא ת"מ כי אין סגירות לחיבור:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin W \cup U$$

(ד) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $W = \{ax^2 + bx + c \in V | b \neq 0\}$ המרחב הוקטורי כאן הוא קבוצת הפולינומים עד דרגה 2. W הוא אוסף הפולינומים עד דרגה 2 מהצורה $ax^2 + bx + c$ כך ש- $b \neq 0$.

פתרון: הפרכה: כי $0_V = 0x^2 + 0x + 0 \notin W$ כי $b = 0$ וזה אסור ב- W , ולכן כיון שוקטור האפס לא נמצא ב- W , אז W לא ת"מ.

$$V = \mathbb{C}^2, W = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : Re(z) = Im(w) \right\}$$

פתרון: למשל $\begin{pmatrix} 3+3i \\ 15+3i \end{pmatrix} \in W$ כי $Re(3+3i) = 3 = Im(15+3i)$ או $Re(3+3i) = 3 = Im(15+3i)$.

בצורה כללית: $\begin{pmatrix} a+bi \\ c+ai \end{pmatrix} \in W$. קל לראות $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$. סגירות לחיבור:

$$\begin{pmatrix} a+bi \\ c+ai \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x+yi \\ t+xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x+(b+y)i \\ c+t+(a+x)i \end{pmatrix} \in W$$

סגירות לכפל בסקלר:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a+bi \\ c+ai \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \alpha bi \\ \alpha c + \alpha ai \end{pmatrix}$$

מה זה $Re(\alpha a + \alpha bi)$? תלוי מה α ... השדה הוא מרוכבים!!! נראה שאין סגירות לכפל בסקלר:

$$i \cdot \begin{pmatrix} 3+3i \\ 15+3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+3i \\ -3+15i \end{pmatrix} \notin W$$

$$Re(-3+3i) = -3 \neq 15 = Im(-3+15i)$$

כי $Re(-3+3i) = -3 \neq 15 = Im(-3+15i)$. אם היינו רוצים לבדוק את סגירות לכפל וחיבור יחד, היינו בודקים אם מתקיים:

$$\begin{pmatrix} a+bi \\ c+ai \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x+yi \\ t+xi \end{pmatrix} \in W?$$

וגם כאן היינו מקבלים שזה תלוי ב- α .

2 תלות ואי-תלות וכו

יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$. ויהיו $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$. נאמר שהם תלויים לינארית אם קיימים סקלרים $a_1, \dots, a_k$ לא כולם 0, כך ש- $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = 0$. נאמר שהם בת"ל אם הם לא ת"ל.

תרגיל: נדבר על $V = \mathbb{R}^4$. נניח v, u, w בת"ל. האם $v+u, v+w, w+u$ בת"ל? פתרון: יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$ ונניח $a(v+u) + b(v+w) + c(w+u) = 0$. צריך לבדוק האם זה מכריח ש- $a = b = c = 0$.

לגבי פרישה: $W \leq V$ מ"ו. קבוצת וקטורים A נקראת פורשת את V אם אוסף הציורפים הלינאריים של מספר סופי של וקטורים מ- A הוא V . לדוגמא $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $U = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av = 0\}$. מצאו קבוצה פורשת. נפתור את הממ"ל ההומי. ונקבל שאוסף הפצרונות הוא :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ואז הקבוצה הפורשת היא $S = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ כי מקבלים: $\text{span}(S) = U$.