תרגיל 3

1. נתונות הקבוצות הבאות:

$$\begin{array}{lll} X_1 = \{\{a\}\} & X_2 = \{a, \{a\}\} & X_3 = \{a, \{\{a\}\}\} \\ X_4 = \{\{a\}, \{\{a\}\}\} & X_5 = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\} & X_6 = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}\} \end{array}$$

אילון מהטענות נכונות:

א. $X_1 \in X_2$

ב. $X_1 \subseteq X_2$

ג. $X_2 \in X_6$

ד. $X_2 \subseteq X_3$

ה. $X_3 \subseteq X_4$

ו. $X_4 \subseteq X_5$

ז. $X_5 \in X_6$

ח. $X_5 \subseteq X_6$

2. מצאו קבוצות A, B, C המקיימות את התנאים הבאים:

א. $A \cup B \subseteq A \cup C$ אבל $B \not\subseteq C$.

ב. $A \cap B \subseteq A \cap C$ אבל $B \not\subseteq C$.

ג. $A \in B, B \in C, A \notin C$.

ד. $A \in B, B \in C, A \in C$

ה. $A \in B, A \subseteq B$

3. הוכיחו:

$$\{2n+5 | n \in \mathbb{Z}\} = \{2n+9 | n \in \mathbb{Z}\}$$

4. הוכיחו או הפריכו:

א. לכל שתי קבוצות X, Y אם $X \subseteq Y$ אז $X \cup (Y \setminus X) = Y$.

ב. $(A \triangle B) \triangle (A \cap B) = A \cup B$.

ג. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.

5. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר:

$$A_n = \begin{cases} [0, \frac{n}{2}] & n \text{ is even number} \\ [-\frac{n-1}{2}, 0] & n \text{ is odd number} \end{cases}$$

כאשר $[a, b]$ הוא הקטע הסגור בממשיים.

א. מצא את $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. הוכח תשובתך.

ב. מצא את $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. הוכח תשובתך.

שאלות אינדוקציה

12 בדצמבר 2016

1. תהיינה $A_1, A_2, ..., A_n$ קבוצות. הוכיחו: $A_1 \triangle A_2 \triangle ... \triangle A_n = \{x | x \text{ in odd number of sets } A_i\}$.
כלומר, קבוצת כל האיברים שנמצאים במס' אי־זוגי של קבוצות מתוך $A_1, A_2, ..., A_n$.

2. יהי A פסוק. נגדיר באינדוציה את הפסוקים הבאים

$$P_0 = A$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : P_n = \neg P_{n-1} \vee A$$

הוכח:
א. לכל n אי זוגי P_n טאוטולוגיה.
ב. לכל n זוגי $P_n \equiv A$.