פתרון מבחן בקורס **חשבון אינפיניטסימלי 1**
מועד **א** (22.02.2018)

שאלה 1 (24 נקודות – 8 נקודות לכל סעיף)

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. יהי H מספר אינסופי חיובי ויהי $0<\mathrm{b}\in\mathbb{R}$. אזי Hb הוא מספר אינסופי חיובי.

פתרון

הטענה **נכונה**, וזה תרגיל משיעורי הבית:

> 4. יהי H מספר אינסופי חיובי, b ממשי חיובי. הוכיחו או הפריכו: bH אינסופי חיובי.
>
> נכון. לפי הגדרת מס' אינסופי חיובי, כדי להראות ש- bH אינסופי חיובי יש להראות כי bH גדול מכל מספר ממשי. יהי r מס' ממשי. H אינסופי חיובי לכן $H>\frac{r}{b}$, כלומר $bH>r$ כדרוש.

(ואפשר גם להוכיח בשלילה. נסו זאת!)

ב. תהיינה f,g שתי פונקציות ממשיות ויהי $\mathrm{c}\in\mathbb{R}$. אם הגבול $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ קיים והגבול $\lim\limits_{x\to c}g(x)$ לא קיים, אז הגבול $\lim\limits_{x\to c}\left(f(x)+g(x)\right)$ לא קיים.

פתרון

הטענה **נכונה**, וזה תרגיל משיעורי הבית:

נניח בשלילה שהגבול $\lim\limits_{x\to c}\left(f(x)+g(x)\right)$ קיים. לכן, לפי אריתמטיקה של גבולות, גם הגבול $\lim\limits_{x\to c}\left(\left(f(x)+g(x)\right)-f(x)\right)$ קיים. כלומר קיבלנו שהגבול $\lim\limits_{x\to c}g(x)$ קיים, בסתירה לנתון.

לכן הגבול $\lim\limits_{x\to c}\left(f(x)+g(x)\right)$ לא קיים.

<u>שימו לב:</u>

טעות שחוזרה על עצמה:

אם $\lim\limits_{x\to c}\left(f(x)+g(x)\right)$ קיים, זה לא אומר שמתקיים $\lim\limits_{x\to c}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to c}f(x)+\lim\limits_{x\to c}g(x)$.

זה נכון רק אם **שני** הגבולות $\lim\limits_{x\to c}f(x),\ \lim\limits_{x\to c}g(x)$ **קיימים**!

ג. תהי f פונקציה ממשית. אם $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, אז קיים $a\in\mathbb{R}$ כך ש- f עולה בקטע (a,∞).

<u>פתרון</u>

הטענה **אינה נכונה**. נפריך עם דוגמה נגדית:

הדוגמה הכי פשוטה היא פונקציית הערך השלם $f(x)=\lfloor x\rfloor$.

ניתן למצוא גם דוגמאות רציפות, למשל: $f(x)=\frac{1}{2}x+\sin x$.

מצד אחד מתקיים $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ ומצד שני הפונקציה לא עולה, שכן

$f'(x)=\frac{1}{2}+\cos x$, ורואים שיש קטעים שבהם הנגזרת שלילית (כלומר הפונקציה יורדת) וקטעים שבהם הנגזרת חיובית (הפונקציה עולה).

דוגמה אפשרית נוספת היא הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \\ x+6 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

<u>שימו לב:</u>

לא ניתן להגדיר פונקציה מהצורה $f(x)=H$ עבור H אינסופי חיובי, שכן נתון ש- f היא פונקציה **ממשית**.

שאלה 2 (26 נקודות)

I. נתונה פונקציה ממשית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת באמצעות:

$$f(x)=\begin{cases} x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}.$$

א. (7 נקודות) באילו נקודות f רציפה?

ב. (8 נקודות) מצאו את f' בנקודות שבהן f גזירה.

ג. (6 נקודות) האם f' רציפה בכל $x\in\mathbb{R}$? אם כן – הוכיחו; אם לא – סווגו את נקודות האי-רציפות שלה (סליקה, מין ראשון, מין שני).

II. (5 נקודות) חשבו את הגבול הבא, או הוכיחו שאינו קיים: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$.

נמקו היטב כל צעד בתשובתכם!

פתרון

I. **א.** לכל $x\neq 0$ הפונקציה רציפה כמכפלה והרכבה של פונקציות רציפות.

נבדוק רציפות בנקודה $x=0$:

מתקיים: $$\lim_{x\to 0}x\arctan\frac{1}{x}=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\Delta x\cdot\arctan\left(\frac{1}{\Delta x}\right)\right)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(infi\cdot finite\right)=0=f(0)$$

ולכן הפונקציה רציפה ב-$x=0$.

הסבר לחישוב הנ"ל: שימו לב ש-$\arctan x$ היא פונקציה חסומה, ולכן $\arctan\frac{1}{\Delta x}$ הוא מספר סופי. מכפלה של סופי באינפי' נותנת מספר אינפי'.

לסיכום: f רציפה בכל נקודה ב-$\mathbb{R}$.

ב. לכל $x\neq 0$ נקבל: $f'(x)=\arctan\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$.

נבדוק גזירות בנקודה $x=0$:

$$\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{\Delta x\cdot\arctan\left(\frac{1}{\Delta x}\right)-0}{\Delta x}\right)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\arctan\left(\frac{1}{\Delta x}\right)\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \Delta x>0\\ -\frac{\pi}{2} & \Delta x<0\end{cases}$$

קיבלנו שהחלק הסטנדרטי תלוי ב-Δx ולכן הפונקציה לא גזירה ב-$x=0$.

לסיכום: f גזירה לכל $x\neq 0$, ומתקיים:

$$f'(x)=\begin{cases}\arctan\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1} & x\neq 0\\ \text{undefined} & x=0\end{cases}.$$

ג. לכל $x\neq 0$ הפונקציה f' רציפה כמנה, הרכבה והפרש של פונקציות רציפות.
הביטוי $f'(0)$ לא מוגדר ולכן f' לא רציפה ב-$x=0$. נבדוק את סוג אי-הרציפות.
נבדוק את הגבולות החד-צדדיים:

$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\arctan\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\arctan\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

קיבלנו שהגבולות החד-צדדיים קיימים ושונים, ולכן בנקודה $x=0$ יש לפונקציה f' אי-רציפות ממין ראשון (קפיצה).

II. הגבול קיים ומתקיים:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\underset{\text{l'Hopital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot-\frac{1}{x^2}}{\cos\frac{1}{x}\cdot-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\cos\frac{1}{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=1.$$

שאלה 3 (22 נקודות)

א. (12 נקודות) הוכיחו שלכל $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ מתקיים: $\tan x \ge x$.

פתרון

ניתן לפתור את התרגיל הזה במספר דרכים שונות. למשל:

דרך א

נגדיר פונקציה $f(x) = \tan x - x$ בתחום $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

שקול להוכיח: לכל $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ מתקיים $f(x) \ge 0$.

לשם כך ננסה למצוא את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.

מתקיים: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \ge 0$.

הסבר לאי-שוויון הנ"ל:

$$0 \le x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos x \le 1 \Rightarrow 0 < \cos^2 x \le 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} \ge 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \ge 0$$

לכן נקבל, לפי משפט המונוטוניות, שהפונקציה עולה בתחום $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

מהגדרת פונקציה עולה נקבל שלכל $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ מתקיים: $f(x) \ge f(0)$, כלומר, $f(x) \ge 0$, וזה בדיוק מה שרצינו להוכיח.

דרך ב

עבור $x = 0$ הטענה ברורה. עבור $x \ne 0$ הטענה שקולה ל-$\frac{\tan x}{x} \ge 1$, או ל-$\frac{\tan x - \tan 0}{x - 0} \ge 1$.

נתבונן בפונקציה $f(t) = \tan(t)$ בקטע $[0, x]$.

f רציפה ב-$[0, x]$ וגזירה ב-$(0, x)$ ולכן מקיימת את תנאי משפט Lagrange.

לכן קיימת נקודה $c \in (0, x)$ שעבורה מתקיים: $f'(c) = \frac{\tan x - \tan 0}{x - 0}$.

כלומר: $\frac{\tan x}{x} = \frac{1}{\cos^2 c}$.

מכיוון ש-$0 < \cos^2 c \le 1$, מקבלים ש-$\frac{1}{\cos^2 x} \ge 1$ ולכן $\frac{\tan x}{x} \ge 1$, כנדרש.

ב. (10 נקודות) תהי f פונקציה ממשית גזירה, ונניח ש- f' רציפה ב- $\mathbb{R}$. נתון ש- $f(0)=0, f(1)=1, f(2)=1$. הוכיחו שקיימת נקודה $c\in(0,2)$ המקיימת: $f'(c)=\frac{11}{17}$.

__**פתרון**__

ניתן לפתור את התרגיל הזה במספר דרכים שונות. למשל:

<u>דרך א</u>

הפונקציה הנתונה מקיימת את תנאי משפט Lagrange בקטעים $[0,1],[1,2]$ ולכן:

$$\exists c_1\in(0,1):\ f'(c_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$$

$$\exists c_2\in(1,2):\ f'(c_2)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=0$$

כעת נתבונן בפונקציה f' בקטע $[c_1,c_2]$. מתקיים $f'(c_1)=0<\frac{11}{17}<1=f'(c_2)$ ולכן

על פי משפט ערך הביניים (על הפונקציה f' בקטע $[c_1,c_2]$) קיימת נקודה $c\in(c_1,c_2)$

כך ש- $f'(c)=\frac{11}{17}$.

<u>דרך ב</u>

נגדיר פונקציה חדשה $g(x)=f(x)-\frac{11}{17}x$.

מתקיים: $g(0)=0,\ g(1)=\frac{6}{17},\ g(2)=-\frac{5}{17}$.

הפונקציה g מקיימת את תנאי משפט ערך הביניים בקטע $[1,2]$ ולכן קיימת נקודה

$c_1\in(1,2)$ כך ש- $g(c_1)=0$.

כעת נתבונן בקטע $[0,c_1]$: הפונקציה מקיימת שם את תנאי משפט Rolle (רציפה ב-

$[0,c_1]$, גזירה ב- $(0,c_1)$ ומקיימת $g(0)=g(c_1)$).

לכן קיימת נקודה $c\in(0,c_1)$ שבה $g'(c)=0$. מכיוון ש- $g'(x)=f'(x)-\frac{11}{17}$, נקבל ש-

$f'(c)-\frac{11}{17}=0$ וזה מוכיח את הדרוש.

<u>שאלה 4</u> (14 נקודות – 7 נקודות לכל סעיף)

א. הוכיחו שהסדרה הבאה היא מונוטונית: $a_n = \dfrac{(n+1)!}{2^n}$.

<u>פתרון</u>

נבדוק את היחס $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$.

מתקיים: $1 \geq \dfrac{2}{n+2} = \dfrac{\frac{(n+1)!}{2^n}}{\frac{(n+2)!}{2^{n+1}}} = \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$.

לכן, מכיוון ש-$1 \geq \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$, הסדרה היא מונוטונית עולה.

ב. מצאו את הגבול הבא אם קיים, ואחרת הוכיחו שאינו קיים: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\ln n)^n}{(5n)^n}$.

<u>פתרון</u>

זהו תרגיל משיעורי הבית:

לפי חוקי חזקות נרשום:

$$\left(\frac{ln(n)}{5n}\right)^n = e^{n \cdot ln\left(\frac{ln(n)}{5n}\right)}$$

קל לראות שהחזקה שואפת ל-$-\infty$ ולכן הגבול של הסדרה כולה שואף ל-0 .

<u>שאלה 5</u> (14 נקודות – 7 נקודות לכל סעיף)

קבעו לגבי כל טור אם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

א. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}}$

<u>פתרון</u>

מדובר בטור חיובי ולכן ניתן להשתמש במבחן ההשוואה. לכל $1 \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}} \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n^3}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ מתבדר, ולכן הטור הנתון מתבדר.

ב. $\sum_{n=8}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln 2n}$

<u>פתרון</u>

<u>נבדוק תחילה התכנסות בהחלט</u>.

מתקיים: $\sum_{n=8}^{\infty}\frac{1}{\ln 2n}=\sum_{n=8}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\ln 2n}\right|$.

כעת, הסדרה $a_n=\frac{1}{\ln 2n}$ היא חיובית ומונוטונית יורדת, ולכן הטור מקיים את תנאי

משפט העיבוי. לכן הטור $\sum_{n=8}^{\infty}\frac{1}{\ln 2n}$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum\frac{2^k}{\ln\left(2\cdot 2^k\right)}$ מתכנס.

נחקור את הטור $\sum\frac{2^k}{\ln\left(2\cdot 2^k\right)}$. מתקיים:

$$\sum\frac{2^k}{\ln\left(2\cdot 2^k\right)}=\sum\frac{2^k}{\ln\left(2^{k+1}\right)}=\sum\frac{2^k}{(k+1)\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}\sum\frac{2^{k+1}}{k+1}.$$

מכיוון ש- $\lim_{k\to\infty}\frac{2^{k+1}}{k+1}=\infty$, הטור לא מקיים את התנאי ההכרחי ולכן מתבדר.

לכן הטור $\sum_{n=8}^{\infty}\frac{1}{\ln 2n}$ מתבדר, ולכן הטור $\sum_{n=8}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln 2n}$ <u>אינו מתכנס בהחלט</u>.

<u>נבדוק התכנסות בתנאי</u>.

הסדרה $a_n=\frac{1}{\ln 2n}$ היא מונוטונית יורדת ומתכנסת לאפס.

הטור $\sum_{n=8}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln 2n}$ הוא טור עם סימנים מתחלפים אשר מקיים את תנאי משפט לייבניץ, ולכן מתכנס.

לסיכום, הטור $\sum_{n=8}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln 2n}$ מתכנס בתנאי.

<u>שאלת בונוס</u> (10 נקודות)

תהי f פונקציה ממשית הרציפה בכל נקודה ב- $\mathbb{R}$. הוכיחו:

קיים פתרון למשוואה $f(x)=x$ אם ורק אם קיים פתרון למשוואה $f(f(x))=x$.

<u>פתרון</u>

<u>כיוון ראשון</u>: נניח שיש פתרון למשוואה $f(x)=x$. כלומר קיים $c\in\mathbb{R}$ שעבורו $f(c)=c$.

לכן: $f(f(c))=f(c)=c$.

כלומר, c הוא פתרון גם של המשוואה $f(f(x))=x$.

<u>כיוון שני</u>: נניח שקיים פתרון למשוואה $f(f(x))=x$. כלומר, קיים $a\in\mathbb{R}$ שעבורו $f(f(a))=a$.

אם $f(a)=a$ אז סיימנו. אחרת נניח בלי הגבלת הכלליות ש- $a<f(a)$ ונגדיר פונקציה חדשה $h(x)=f(x)-x$ בתחום $[a,f(a)]$.

נשים לב ש- h רציפה בקטע הנ"ל ומתקיים:

$$h(a)=f(a)-a>0$$
$$h(f(a))=f(f(a))-f(a)=a-f(a)<0$$

לכן, לפי משפט ערך הביניים, קיימת נקודה $c\in(a,f(a))$ שעבורה $h(c)=0$ ולכן $f(c)-c=0$ וזה מוכיח את הדרוש.

המון הצלחה בסמסטר ב'!