מבוא לטופולוגיה - תרגיל 11

שאלה 1

הוכיחו שאם B_i הוא בסיס לטופולוגיה במ"ט X_i $(1 \le i \le n)$ אז
האוסף של כל הקבוצות מסוג $G_1 \times \ldots \times G_n$ כאשר $G_i \in B_i$
הוא בסיס לטופולוגית מכפלה ב-$X_1 \times \ldots \times X_n$.

שאלה 2

הוכיחו שהטופולוגיה ב- $(X_1 \times \ldots \times X_n) \times (Y_1 \times \ldots \times Y_m)$ היא
אותה הטופולוגיה שב-$X_1 \times \ldots \times X_n \times Y_1 \times \ldots \times Y_m$.

הערה אפשר להניח שמהבחינה הקבוצתית שתי הקבוצות האלה
זהות, כלומר,הן מכילות אתום האיברחם:

$$(X_1 \times \ldots \times X_n) \times (Y_1 \times \ldots \times Y_m) =$$
$$X_1 \times \ldots \times X_n \times Y_1 \times \ldots \times Y_m =$$
$$\{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) | x_i \in X_i, y_j \in Y_j, 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$$

שאלה 3

הוכיחו שהטופולוגיה הרגילה ב-$\mathbb{R}^n$ היא טופולוגית המכפלה.

שאלה 4

יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים ו- $A, F \subseteq X$; $B, G \subseteq Y$.

הוכיחו: א) אם F, G סגורות אז $F \times G$ סגורה.

ב) $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$.

שאלה 5

יהיו $F, G \subseteq M$ שתי קבוצות קומפקטיות במרחב
מטרי M. הוכיחו שקימות נקודות $x_0 \in F$ ו-$y_0 \in G$
כך ש-$d(x_0, y_0) = \inf\limits_{\substack{x \in F \\ y \in G}} d(x, y)$.