פולינום מינימלי

הגדרות: יהיו f,g שני פולינומים.

1. המחלק המשותף המקסימלי שלהם, $gcd(f,g)$ הוא פולינום מתוקן k שמחלק את שניהם, וכל פולינום אחר שמחלק את שניהם, מחלק אותו.
2. הכפולה המשותפת המינימלית שלהם $lcm(f,g)$ היא פולינום מתוקן k' ששניהם מחלקים אותו, וכל פולינום ששניהם מחלקים, גם k' מחלק.

לדוגמא: $f=(x-1)(x-2)^2(x-3)^5, g=(x-12)(x-1)^3(x-3)^4$

$$gcd(f,g)=(x-1)(x-3)^4$$

$$lcm(f,g)=(x-1)^3(x-2)^2(x-3)^5(x-12)$$

אלגוריתם: נפרק את שני הפולינומים לגורמים אי פריקים.

בשביל gcd נקח כל גורם בחזקה הכי נמוכה שבה הוא מופיע בשניהם. (אם יש גורם שלא מופיע באחד מהם, אפשר להניח שהוא מופיע בחזקת אפס)

בשביל הlcm נקח כל גורם בחזקה הכי גבוהה שבה הוא מופיע.

הגדרה: תהי A מטריצה ריבועית. הפולינום המינימלי של A, מסמנים: $m_A(x)$ הוא הפולינום המתוקן מהדרגה הנמוכה ביותר שמקיים $m_A(A)=0$.

הערה: ידוע שאם נציב את A בפולינום האופייני שלה נקבל את מטריצת ה0. כלומר, $p_A(A)=0$.

לדוגמא: $A=I$.

$$m_A=x-1$$

$$m_A(I)=I-I=0$$

.2

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$$

ידוע שA מאפסת את הפולינום $(x-1)(x-2)$ כי זה הפולינום האופייני שלה.

זה פולינום מדרגה 2.

היא לא יכולה לאפס פולינום מדרגה 1, כי אז היא תהיה מטריצה סקלרית. כי אם A מאפסת את הפולינום $x-\alpha$, זה אומר ש$A-\alpha I=0$. כלומר, $A=\alpha I$.

לכן זה הפולינום מהדרגה הנמוכה ביותר שA מאפס. כלומר

$$m_A=(x-1)(x-2)$$

טענה: אם A וB דומות, $m_A=m_B$.

הוכחה: נוכיח שA וB מאפסות בדיוק את אותם פולינומים.

נתון שA וB דומות, כלומר קיימת מטריצה הפיכה P כך ש:

$$P^{-1}AP = B$$

יהי f פולינום שA מאפסת. נוכיח שB מאפסת אותו.

$$f = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$f(A) = 0$$

כלומר,

$$A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + ... + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$$

נכפול בP^{-1} משמאל וP מימין.

$$P^{-1}(A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + ... + \alpha_1 A + \alpha_0 I)P = P^{-1}0P$$

$$P^{-1}A^nP + \alpha_{n-1}P^{-1}A^{n-1}P + ... + \alpha_1 P^{-1}AP + \alpha_0 P^{-1}IP = 0$$

$$(P^{-1}AP)^n + \alpha_{n-1}(P^{-1}AP)^{n-1} + ... + \alpha_1 P^{-1}AP + \alpha_0 I = 0$$

$$B^n + \alpha_{n-1}B^{n-1} + ... + \alpha_1 B + \alpha_0 I = 0$$

כלומר

$$f(B) = 0$$

הכיוון השני נכון באותו אופן. אם $P^{-1}AP = B$, אז $PBP^{-1} = A$, ואז אפשר לעשות בדיוק את אותה הוכחה.
כלומר, A וB מאפסות בדיוק את אותה קבוצת פולינומים, ולכן יש להם את אותו פולינום מינימלי.
תרגיל: יהי $V = \mathbb{F}^{n\times n}$. ו$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

$$W = span\{I, A, A^2, A^3, ..., A^n, ...\}$$

ראשית, נשים לב שאומנם W הוא $span$ של קבוצה אינסופית, אבל הוא תת מרחב של מרחב ממימד סופי ולכן יש לו מימד סופי. הוכיחו ש

$$\dim W = \deg m_A$$

לדוגמא: $A = I$ אז

$$W = span\{I\}$$

ולכן $\dim W = 1$

דוגמא נוספת: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$W = span\{I, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 3A - 2I, ...\}$$

$$A^3 = 3A^2 - 2A = 3(3A - 2I) - 2A = 7A - 6I$$

ובאותו אופן נוכל לבטא כל A^n באמצעות A וI. ולכן $\dim W = 2$
הוכחת התרגיל:
נניח ש$\deg(m_A) = d$. ניקח את $I, A, A^2, ...A^{d-1}$. נוכיח שהיא בסיס לW.
ראשית, נוכיח שהיא בת"ל.
ניקח צירוף לינארי מתאפס ונוכיח שהוא טרייואלי. נניח ש

$$\alpha_{d-1}A^{d-1} + ... + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$$

נסתכל על הפולינום

$$f(x) = \alpha_{d-1}x^{d-1} + ...\alpha_1 x + \alpha_0$$

אם $f(x) \neq 0$ אז קיבלנו פולינום לא טריוויאלי מדרגה קטנה מd שמאפס את A, בסתירה לכך שהפולינום המינימלי של A הוא מדרגה d.
כעת נוכיח שהיא פורשת את W.
נסמן:

$$m_A = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + ... + a_1 x + a_0$$

נשים לב שמהצבת A בפולינום המינימלי נקבל:

$$A^d = -a_{d-1}A^{d-1} - ... - a_1 A - a_0 I$$

נוכיח באינדוקציה שלכל $k \geq d$ טבעי

$$A^k \in span\{I, ..., A^{d-1}\}$$

בסיס: $k = d$ -הוכחנו.

צעד: נניח נכונות לk ונוכיח ל$k+1$.

$$A^k \in span\{I, ..., A^{d-1}\}$$

כלומר, קיימים מקדמים כך ש:

$$A^k = \beta_0 I + ... + \beta_{d-1} A^{d-1}$$

$$A^{k+1} = AA^k = A(\beta_0 I + ... + \beta_{d-1} A^{d-1}) = \beta_0 A + ... + \beta_{d-1} A^d$$

אנחנו כבר יודעים ש$A^d \in span\{I, ..., A^{d-1}\}$, ולכן $A^{k+1} \in span\{I, ..., A^{d-1}\}$.
מש"ל.

תכונות:

1. הפ"מ של A מחלק כל פולינום שA מאפסת. כלומר, אם $f(A) = 0$, אז $m_A | f$
2. הפ"מ של A הוא הפולינום המתוקן היחיד מאותה דרגה שמאפס את A.
3. $m_A | p_A$. למעשה, יש להם את אותם גורמים אי פריקים.

אלגוריתם למציאת פולינום מינימלי:

מצאו את הפולינום האופייני, פרקו אותו לגורמים לינארים, ועכשיו נותר לבדוק את כל הקומבינציות של הגורמים האלה. (כל אחד מהגורמים חייב להופיע).

דוגמא: חשבו את הפולינום המינימלי של:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 & \\ & 1 & & & 1 \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & -1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

$$p_A = (x-1)^2 (x-2)^2 (x-3)$$

הפאפשרויות שצריך לבדוק:

$$(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$(x-1)^2(x-2)(x-3)$$

$$(x-1)(x-2)^2(x-3)$$

$$p_A$$

בפולינום הראשון מתקבל

$$\begin{pmatrix} 2 & & -1 & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

בפולינום השני יוצאת מטריצת האפס.
לכן

$$m_A = (x-1)^2(x-2)(x-3)$$

1. מטריצות ממשיות:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 2 & 1 & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 2 & 1 & \\ & & & 2 & 1 \\ & & & & 2 \end{pmatrix}$$

$$p_A = (x^2+1)(x-2)^3$$

$$m_{A_i} = (x^2+1)(x-2)^i$$

תרגיל: תהי A מטריצה שמקיימת $A^2 = A$. הוכיחו שA ניתנת לשילוש.
פתרון: צריך להוכיח שp_A מתפרק לגורמים לינאריים.

$$A(A-I) = 0$$

כלומר, הפולינום $f(x) = x(x-1)$ מאפס את A. הוכחתם ש$p_A|f^n$ (עבור כל פולינום שמאפס את A).
כלומר,

$$p_A|x^n(x-1)^n$$

ולכן p_A מתפרק לגורמים לינארים.
שאלה: אם לA ולB יש את אותו פ"א ואותו פ"מ. האם זה אומר שהן דומות?
תשובה: לא!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

פ"א-

$$(x-2)^4$$

$$m_B = (x-2)^2$$

$$m_A = (x-2)^2$$

אנחנו יודעים שלמטריצות דומות, לכל ע"ע יש את אותו ר"ג.

$$m_2(A) = 3$$

$$m_2(B) = 2$$

לכן A וB לא דומות.

הערה: במטריצות עד גודל 3 על 3, 2 מטריצות עם אותו פ"א ופ"מ בהכרח דומות (ייתכן שנוכיח בהמשך)

תרגיל: $m_A(x) = (x-1)^2$. $f(x) = x^2 + 4x + 3$. הוכיחו ש$f(A)$ הפיכה.

פתרון: הע"ע של A זה השורשים של הפ"מ (כי אנחנו יודעים שלפ"מ ולפ"א יש את אותם שורשים). לכן הע"ע היחיד של A הוא 1 .

$$f(A) = A^2 + 4A + 3I = (A+I)(A+3I)$$

מכיוון שרק 1 הוא ע"ע אז -1 ו-3 הם לא ע"ע. ולכן $|A+3I|, |A+I| \neq 0$.
לכן

$$|A^2 + 4A + 3I| \neq 0$$

כלומר המטריצה הפיכה.

הגדרה: תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. A נקראת מטריצה נילפוטנטית אם קיים איזשהו k טבעי כך ש$A^k = 0$.

תרגיל: תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ נילפוטנטית. הוכיחו ש$A^n = 0$.

הוכחה: $\deg(m_A) \leq n$.

אם $A^k = 0$, אז x^k הוא פולינום מאפס של A. ולכן $m_A | x^k$. אז הפולינום המינימלי הוא מהצורה x^l כאשר $l \leq k$.

ליתר דיוק, $l \leq n$. הפולינום המינימלי מאפס את A, כלומר $A^l = 0$. מכיוון ש$l \leq n$, נובע ש$A^n = 0$.