תרגיל 9

1. יהיו $\{X_i\}$ מספר לא סופי של מ״ט. הוכיחו כי אם $\emptyset \neq U_i \neq X_i$ פתוחות ב X_i אזי $\prod U_i$ אינה פתוחה ב $X = \prod X_i$.

2. יהיו $\{X_i\}$ מ״ט (מספר סופי או אינסופי). ויהיו S_i סגורה ב X_i. הוכיחו כי $\prod S_i$ סגורה ב $\prod X_i$.

3. יהא X אינסופי עם הטופלוגיה הדיסקרטית. הוכיחו כי X אינו קומפקטי.

4. הוכיחו כי l_∞ אינו קומפקטי (תזכורת $l_\infty = \{x : \sup |x_i| < \infty\}$). הדרכה: מצאו קבוצה סגורה שאינה קומפקטית.

5. הוכיחו כי $X = [0,1]$ עם הטופולוגיה המשורית מסונגפריי אינו קומפקטי.

6. יהא X מ״ט, יהיו $\{A_i\}_{i\in I}$ מספר סופי של ת״מ קומפקטים. הוכיחו כי $\cup A_i$ קומפקטי גם כן.

7. תזכורת: מרחב האוסדורף X נקרא קומפקטי מקומית אם לכל נקודה $x \in X$ קיימת קבוצה קומפקטית A כך ש$x \in int(A)$.
תרגיל (קומפקטיפיקציית הנקודה): יהא X מרחב T_2 שאינו קומפקטי. נגדיר $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ כאשר ∞ איבר שלא ב X. נגדיר טופלוגיה τ על $\hat{X}$ ע״י שנגדיר את הקבוצות הסגורות בו: הקבוצות הסגורות ב $\hat{X}$הן תתי הקבוצות הקומפקטיות של X והקבוצות מהצורה $S \cup \{\infty\}$ עבור S סגורה ב X.

   (א) הוכיחו כי אכן τ טופולוגיה (היעזרו בעובדה כי כל קבוצה סגורה F ב $\hat{X}$ מקיימת כי $F \backslash \{\infty\}$ קבוצה סגורה ב X).

   (ב) הוכיחו כי X הוא תת מרחב של $\hat{X}$.

   (ג) הוכיחו כי $\hat{X}$ הוא קומפקטי.

   (ד) הוכיחו כי X צפופה ב $\hat{X}$.

(ה) הוכיחו כי X קומפקטי מקומי אמ"מ $\hat{X}$ הוא T_2

8.]בונוס[

(א) הוכיחו כי $\mathbb{Q}$ אינו קומפקטי מקומי והסיקו כי קומפקטיפיקציית הנקודה $\hat{\mathbb{Q}}$ אינה T_2.

(ב) הוכיחו כי ב $\hat{\mathbb{Q}}$ כי כל קבוצה היא סגורה אמ"מ היא קומפקטית.