תרגול 2 - העתקות לינאריות

עוזי חרוש ופולה לוצקר

הגדרה. העתקה T ממרחב וקטורי V אל מרחב וקטורי W (מסמנים $T:V\to W$) תקרא "העתקה לינארית" או "טרנספורמציה לינארית", אם מתקיימים התנאים הבאים:

- T משמרת חיבור: לכל שני ווקטורים v,u השייכים למרחב V מתקיים:
$$T(v+u)=T(v)+T(u)$$
- T משמרת כפל בסקלר: לכל וקטור v השייך למרחב V, ולכל סקלר α השייך לשדה מתקיים:
$$T(\alpha v)=\alpha T(v)$$

הערה. נשים לב שלכל ההעתקה לינארית מתקיים $T\left(0\right)=0$

תרגיל. תהי
$$T:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2}$$
העתקה לינארית המקיימת
$$T\left(AB\right)=T\left(A\right)T\left(B\right)$$
לכל $A,B\in\mathbb{R}^{2\times2}$ הוכח ש-
$$T\left(\left(\begin{array}{cc}0&0\\1&0\end{array}\right)\right)\neq I$$

פתרון. נניח בשלילה שקיימת העתקה לינארית המקיימת
$$T\left(AB\right)=T\left(A\right)T\left(B\right)$$
וגם
$$T\left(\left(\begin{array}{cc}0&0\\1&0\end{array}\right)\right)=\left(\begin{array}{cc}1&0\\0&1\end{array}\right)$$
אז אם נבחר
$$A=B=\left(\begin{array}{cc}0&0\\1&0\end{array}\right)$$
ונקבל ש-
$$0=T\left(\left(\begin{array}{cc}0&0\\0&0\end{array}\right)\right)=T\left(\left(\begin{array}{cc}0&0\\1&0\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}0&0\\1&0\end{array}\right)\right)=T\left(\left(\begin{array}{cc}0&0\\1&0\end{array}\right)\right)^2=I^2=I$$
סתירה.

משפט. משפט ההגדרה: יהיו V,W מרחבים ווקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$ יהיו
$$\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$$
בסיס ל-V ו-
$$\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$$
ווקטורים ב-W, אז קיימת העתקה לינארית יחידה המקיימת $T\left(v_i\right)=w_i$

תרגיל. מצא העתקה לינארית המקיימת $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ו- $T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

פתרון.

$$\begin{aligned}
T\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &= T\left(y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+(x-y)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) &=\\
&= yT\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)+(x-y)\,T\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) &=\\
&= y\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+(x-y)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}x+3y\\2x+3y\\3x+3y\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

הגדרה. תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית

- הגרעין של T הוא
$$Ker\,(T)=\{v\in V|T\,(v)=0\}$$
- התמונה של T היא
$$Im\,(T)=\{w\in W|\exists v\in V:T\,(v)=w\}$$

תרגיל. תהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ העתקה לינארית המוגדרת על ידי $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\2x-2y\end{pmatrix}$
מצא בסיס לגרעין ולתמונה של T

פתרון.

- גרעין

$$\begin{aligned}
Ker\,(T) &= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\middle|T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0\right\} &=\\
&= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}x-y\\2x-2y\end{pmatrix}=0\right\} &=\\
&= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\middle|x=y\right\} &= span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

- תמונה

$$\begin{aligned}
Im\,(T) &= \left\{w\in\mathbb{R}^2|\exists v\in\mathbb{R}^2:T\,(v)=w\right\} &=\\
&= \left\{T\,(v)\,|v\in\mathbb{R}^2\right\} &=\\
&= \left\{\begin{pmatrix}x-y\\2x-2y\end{pmatrix}\middle|x,y\in\mathbb{R}\right\} &= Span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

הערה. יהיו
$$T:V\to W$$
העתקה לינארית ו-
$$\{v_1,v_2,...,v_n\}$$
הוא בסיס ל-V אז
$$Im\left(T\right)=span\left(T\left(v_1\right),T\left(v_2\right),\ldots,T\left(v_n\right)\right)$$

משפט. משפט הדרגה של העתקות לינאריות
$$dim\left(V\right)=dim\left(Im\left(T\right)\right)+dim\left(Ker\left(T\right)\right)$$

תרגיל. תהי
$$M=\left(\begin{array}{cc}1&2\\2&1\end{array}\right)\in R^{2\times2}$$
מטריצה, ותהי העתקה לינארית
$$T:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2}$$
המוגדרת
$$T\left(X\right)=MX-XM$$
הוכח כי
$$dim\left(Ker\left(T\right)\right)=dim\left(Im\left(T\right)\right)$$

פתרון. נמצא בסיס ל-$Im\left(T\right)$.
$$\begin{aligned}Im\left(T\right)&=&Span\left\{T\left(\begin{array}{cc}1&0\\0&0\end{array}\right),T\left(\begin{array}{cc}0&1\\0&0\end{array}\right),T\left(\begin{array}{cc}0&0\\1&0\end{array}\right),T\left(\begin{array}{cc}0&0\\0&1\end{array}\right)\right\}&=\\&=&Span\left\{\left(\begin{array}{cc}0&-2\\2&0\end{array}\right),\left(\begin{array}{cc}-1&0\\0&1\end{array}\right),\left(\begin{array}{cc}1&0\\0&-1\end{array}\right),\left(\begin{array}{cc}0&2\\-2&0\end{array}\right)\right\}&=\\&=&Span\left\{\left(\begin{array}{cc}0&-1\\1&0\end{array}\right),\left(\begin{array}{cc}-1&0\\0&1\end{array}\right)\right\}\end{aligned}$$
לכן לפי משפט הדרגה נקבל ש-
$$\begin{gathered}dim\left(V\right)=dim\left(Im\left(T\right)\right)+dim\left(Ker\left(T\right)\right)\\\Downarrow\\4=2+dim\left(Ker\left(T\right)\right)\\\Downarrow\\2=dim\left(Ker\left(T\right)\right)\end{gathered}$$
מכאן
$$dim\left(Ker\left(T\right)\right)=dim\left(Im\left(T\right)\right)=2$$

הגדרה. תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית

- T חח"ע אם
$$\begin{gathered}T\left(v_1\right)=T\left(v_1\right)\\\Downarrow\\v_1=v_2\end{gathered}$$

- T על אם

$$\forall w\in W:\exists v\in V:T\left(v\right)=w$$

משפט. תהיה $T:V\rightarrow W$ העתקה לינארית אז

1. T חח"ע אם ורק אם $Ker\left(T\right)=\left\{ \vec{0}\right\}$
2. T על אם ורק אם $Im\left(T\right)=W$

תרגיל. (אם יש זמן) האם $\left(\begin{array}{c} x-z\\ y-x \end{array}\right)=T\left(\begin{array}{c} x\\ y\\ z \end{array}\right)$ היא חח"ע?

פתרון. בכדי לבדוק לבדוק האם T היא חח"ע מצא את $Ker\left(T\right)$.

$$Ker\left(T\right)=\left\{ T\left(\begin{array}{c} x\\ y\\ z \end{array}\right)\middle|T\left(\begin{array}{c} x\\ y\\ z \end{array}\right)=0\right\} =\left\{ T\left(\begin{array}{c} x\\ y\\ z \end{array}\right)\middle|\left(\begin{array}{c} x-z\\ y-x \end{array}\right)=0\right\} =Span\left(\begin{array}{c} 1\\ 1\\ 1 \end{array}\right)\neq\left\{ \vec{0}\right\}$$

ולכן אינה חח"ע .

תרגיל. (אם יש זמן) האם $\left(\begin{array}{c} x\\ y\\ x+2y \end{array}\right)=T\left(\begin{array}{c} x\\ y \end{array}\right)$ היא על?

פתרון. נמצא בסיס ל-$Im\left(T\right)$.

$$Im\left(T\right)=Span\left\{ T\left(\begin{array}{c} 1\\ 0 \end{array}\right),T\left(\begin{array}{c} 0\\ 1 \end{array}\right)\right\} =Span\left\{ \left(\begin{array}{c} 1\\ 0\\ 1 \end{array}\right),\left(\begin{array}{c} 0\\ 1\\ 2 \end{array}\right)\right\} \neq W$$

ולכן אינה על.

הערה. יכלנו לדעת זאת מראש כידוע ש-

1. אם T חח"ע אז $dim\left(V\right)\leq dim\left(W\right)$
2. אם T על אז $dim\left(W\right)\leq dim\left(V\right)$

שימו לב אלו תנאים הכרחים אך לא מספיקים

הגדרה. נאמר ש-Vו-Wאיזומרפים ונסמן $V\cong W$ אם קיימת $T:V\rightarrow W$ העתקה לינארית חח"ע ועל.

הערה. אם

$$T:V\rightarrow W$$

העתקה לינארית חח"ע ועל אז קיימת

$$S:W\rightarrow V$$

כך ש-

$$\begin{cases} \forall w\in W: & T\left(S\left(w\right)\right)=w\\ \forall v\in V: & S\left(T\left(v\right)\right)=v \end{cases}$$

וסמנה ב-T^{-1}

משפט. $V\cong W\Leftrightarrow dim\left(V\right)=dim\left(V\right)$ איך מוצאים את האיזומורפיזים? פשוט מעבירים אברי בסיס של V לאברי בסיס של W.

הערה. איזומורפיזים בין מרחבים ווקטורים הוא יחס שקילות(הוכיחו בבית)

תרגיל. לגבי כל אחד הטענות הבאות קבע האם קיימת העתקה לינארית. אם כן- תן דוגמא, אם לא- הסבר למה לא.

1. $T:\mathbb{R}^{3}\rightarrow\mathbb{R}^{5}$ המקיימת $dim\left(Im\left(T\right)\right)=4$
לא יתכן, נניח בשלילה שקיימת לכן לפי משפט הדרגה מתקיים
$$dim\left(V\right)=dim\left(Im\left(T\right)\right)+dim\left(Ker\left(T\right)\right)$$
ובמקרה שלנו
$$3=4+dim\left(Ker\left(T\right)\right)$$
לכן
$$-1=dim\left(Ker\left(T\right)\right)$$
סתירה

2. $T:\mathbb{R}^{3}\rightarrow\mathbb{R}^{5}$ איזומורפיזים.
לא יתכן, נניח בשלילה שקיימת אז Tעל ולכן
$$dim\left(W\right)\leq dim\left(V\right)$$
סתירה

3. $T:\mathbb{R}_{3}\left[x\right]\rightarrow\mathbb{R}^{2\times2}$ איזומורפיזים.
נכון קיימת, נשלח בסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי כלומר
$$\begin{cases}
T\left(1\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\
T\left(x\right)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\
T\left(x^{2}\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\
T\left(x^{3}\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}
\end{cases}$$