# מבוא לטופולוגיה – תרגיל 7

1. האם קבוצת המספרים האי-רציונליים קשירה (בטופולוגיה המושרת מ-$\mathbb{R}$ ) ?

<u>פתרון:</u> נסמן $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , $U = (-\infty, 0) \cap \mathbb{I}$ ו- $V = (0, \infty) \cap \mathbb{I}$
(כאשר $\mathbb{Q}$ - קבוצת המספרים הרציונליים).
אזי $U$ ו- $V$ פתוחות ב-$\mathbb{I}$ (בטופולוגיה המושרת מ-$\mathbb{R}$ ). וחוץ מזה:
$$U \cup V = \big((-\infty, 0) \cap \mathbb{I}\big) \cup \big((0, \infty) \cap \mathbb{I}\big) = (\mathbb{R} - \{0\}) \cap \mathbb{I} = \mathbb{I}$$
לכן $\mathbb{I}$ אינו קשיר לפי ההגדרה.

2. יהי $X = \{a, b\}$ ו- $(X, \tau)$ מרחב טופולוגי קשיר ולא טריוויאלי.
<u>מצאו</u> כל הטופולוגיות $\tau$ המקימות את התנאי הזה.

<u>פתרון:</u>
קבוצה של כל התת-קבוצות של $X$ היא: $\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$ .
כל טופולוגיה מכילה $\emptyset$ ו-$X$. לפי התנאח שלנו הטופולוגיה המבוקשת - הלא טריוויאלית - חייבת להכיל $\{a\}$ או $\{b\}$.
להכיל גם $\{a\}$ וגם $\{b\}$ היא לא יכולה: כי במקרה הזה היא היתה דיסקרתית ולכן המרחב היה לא קשיר! נשארו רק שתי אפשרויות:
$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ ו- $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$.
קל לבדוק ששתיהן באמת טופולוגיות.
המרחבים $(X, \tau_1)$, $(X, \tau_2)$ קשירים כי אפרות היחידה לפצל $X$ לתת-קבוצות לא ריקות היא $X = \{a\} \cup \{b\}$. אבל בשתי הטופולוגית $\{a\}, \{b\}$ לא פתוחות בו זמנית.
<u>תשובה</u>: $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ ו- $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$.

3. יהי $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$ .

א) <u>הוכיחו</u> ש- $L$ *קבוצה קשירה מסילתית*

נוכיח קודם טענה שנשתמש בה כאן וגם בהקדם:

<u>טענה</u>

יהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קטע (פתוח סגור או חצי סגור) ב- $\mathbb{R}$ או $\mathbb{R}$ כולו. יהיו שתי פונקציות $\varphi_1, \varphi_2 : A \to \mathbb{R}$ רציפות. תהי פונקציה $f: A \to \mathbb{R}^2$ מוגדרת כך ש- $f(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$.

אזי $f$ פונקציה רציפה. (כל הרציפויות פה – ביחס לטופולוגיות הרגילות=האוקלידיות)

<u>הכחת הטענה</u>

נזכיר שמטריקה האוקלידית ומטריקה $d_\infty$ ב-$\mathbb{R}^2$ הן מטריקות שקולות, ז"א, יוצרות אתה הטופולוגיה הרגילה. לכן בהוכה בזות אנחנו יכולים לבחור כל מתריקה משתיים האלה. נבחר $d_\infty$.

ב-$A$, כמובן, מטריקה המושרת מ-$\mathbb{R}$ . אזי:

תהי $t_n$ סדרה ב-$A$ כך ש-$\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$ .

אז $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_1(t_n) = \varphi_1(t)$ ו- $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_2(t_n) = \varphi_2(t)$

כי $\varphi_1, \varphi_2$ רציפות. מזה נובע:

$$d(\varphi_1(t_n), \varphi_1(t)) \to 0 \ \wedge \ d(\varphi_2(t_n), \varphi_2(t)) \to 0$$

לפי קריטריון הרציפות פונקציות במרחבים מטריים.

זה מייד גורר:

$$\max\{d\big(\varphi_1(t_n), \varphi_1(t)\big), d(\varphi_2(t_n), \varphi_2(t))\} \to 0$$

אבל:

$$\max\left\{d\left(\varphi_1(t_n),\varphi_1(t)\right),d\left(\varphi_2(t_n),\varphi_2(t)\right)\right\}=$$
$$\max\{|\varphi_1(t_n)-\varphi_1(t)|,|\varphi_2(t_n)-\varphi_2(t)|\}=$$
$$d_\infty\left(\left(\varphi_1(t_n),\varphi_2(t_n)\right),\ \left(\varphi_1(t),\varphi_2(t)\right)\right)=$$
$$d_\infty(f\left(t_n\right),f(t))$$

ז"א, קיבלנו :

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n)=f(t) \Leftarrow d_\infty(f\left(t_n\right),f(t))\to 0 \Leftarrow \lim_{n\to\infty} t_n=t$$

ולכן $f$ רציפה, מש"ל. <u>הטענה הוכחה.</u>

<u>הוכחת א)</u> יהיו $p_1(x_1,y_1),p_2(x_2,y_2)$ שתי נקודות שונות ב-$L$.
אזי $x_1=y_1\neq x_2=y_2$.
נגדיר $A=[x_1,x_2]$ ו- $\varphi_1(t)=\varphi_2(t)=t$ לכל $t\in A$.
<u>לפי הטענה</u> הפונקציה $f\colon A\to\mathbb{R}$
(כאשר $f(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t))=(t,t)$ ) רציפה ו-
$f([x_1,x_2]\subseteq L)$. אם נגדיר בנוסף $g\colon[0,1]\to\mathbb{R}^2$ כאשר
$g(x)=f(x(x_2-x_1)+x_1)$, נראה ש-$g$ רציפה כהרכבת
רציפות ו-$g([0,1]=f([x_1,x_2]\subseteq L$. זה מוכיח ש-$L$ קשירה
מסילתית לפי ההגדרה, מש"ל.

ב) *יהיו :*
$U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x<y\};$
$V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x>y\}$
<u>הוכיחו</u> ש- $U,V$ רכיבי קשירות של המרחב $L^c$.
<u>הוחכה</u>.
נוכיח ש-$U$ קבוצה קשירה מסילתית.
יהיו $p_1(x_1,y_1),p_2(x_2,y_2)\in U$ שתי נקודות שונות ב-$U$ .
אזי פונקציה $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}^2$
כאשר $f(t)=(x,y)=(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1))$

רציפה ( לפי התענה). נתבונן בהפרש בין הקואורדינטות.
אז נקבל לכל $t \in [0,1]$:

$$y - x = y_1 + t(y_2 - y_1) - x_1 - t(x_2 - x_1) =$$
$$y_1 - x_1 + t(y_2 - x_2 - y_1 + x_1) =$$
$$(1-t)(y_1 - x_1) + t(y_2 - x_2) > 0$$

מזה מייד נובע ש-$f(t) \in U$ לכל $t \in [0,1]$. אזי $U$ קשירה מסילתית, מש"ל.
בדיוק באתה דרך מוכיחים ש- $V$ קשירה מסילתית. אפשר להסיק מזה ש-$U, V$ קבוצות קשירות (הרצאה). נזכיר שהן גם פתוחות ב-$\mathbb{R}^2$ ולכן גם ב-$L^c$ (ראינו בכיתה).
כיוון ש-$U \cup V = L^c$, אם רכיב הקשירות (במרחב $L^c$ ) המכיל את $U$ לא שווה ל-$U$ , הוא נחתך עם $V$ שסותר לקשירותו. לכן $U$ עצמו רכיב קשירות. בדיוק באותה לוגיקה - $V$ רכיב קשירות. עוד רכיבים אינם קיימים כי $U \cup V = L^c$.■

4. <u>תזכורת.</u> *הישר של סורגנפריי (או זורגנפריי)* הוא מרחב טופולוגי $(\mathbb{R}, \sigma)$ כך ש-$\sigma$ מורכבת מכל מיני אחודים מסוג:

$$\bigcup_{\alpha \in I} [a_\alpha, b_\alpha)$$

כאשר $I$ קבוצת אינדקסים כלשהי ו-$a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R}$. (בדקנו פעם בכיתה שזאת אכן טופולוגיה. )
<u>מצאו</u> את כל רכיבי הקשירות של $(\mathbb{R}, \sigma)$ .
<u>פתרון</u>. יהיו $x < y \in \mathbb{R}$ . נסמן: $z = \frac{x+y}{2}$,
$U = (-\infty, z),\ V = [z, \infty)$ . *אזי* $\mathbb{R} = U \cup V$ ואפשר לרשום:

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [z-n, z)\ ;\ V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [z, z+n)$$

מזה נובע:

$U, V \in \sigma$ - לפי הגדרת $\sigma$.
$x \in U, y \in V$, שגורר גם $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$.
זות אומרת הפרדנו נקודות $x, y$ על ידי שתי קבוצות פתוחות בטופולוגית סורגנפריי ומשלימות זו את זו ל-$\mathbb{R}$ . לכן שתי נקודות שונות לא יכולות להיות שייכות לקבוצה קשירה אחת, ובפרט לא יכולות להיות מוכלות באותו רכיב קשירות. אזי כל רכיב קשירות מכיל רק נקודה אחת ז"א, רכיבי הקשירות הם נקודונים.

5. הוכיחו שהמרחבים $\mathbb{R}$ ו-$\mathbb{R}^2$ (אם הטפולוגיה האוקלידית) אינם הומאומורפיים.
הוכחה. נניח - בשלילה -שקיים הומאומואורפיזם $i: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
נסמן: $X = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ , $p_0 = i((0,0) \in \mathbb{R}$ ו- $Y = \mathbb{R} - \{p_0\}$.
אזי גם $i|_X: X \to Y$ הומאומורפיזם כי:
- פונקציה $i^{-1}|_Y: Y \to X$ רציפה, חח'ע ועל (כצימצום של $i^{-1}$)
- ו- $i|_X \circ i^{-1}|_Y = Id_Y$ , $i^{-1}|_Y \circ i|_X = Id_X$. (צימצומים)

אבל $Y = (-\infty, p_0) \cup (p_0, \infty)$ אינו קשיר.
כדי לקבל סתירה מספיק להוכיח ש-$X$ כן קשיר.
נתבונן בישר $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$ (כמו בשאלה 3) ובישר נוסף: $L' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = -x\}$ (מומלץ לצייר!).
נסמן כמו ב-3 ב) :
$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < y\}$$
$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > y\}$$
ונזכיר ש- $U \cup V = L^c = \mathbb{R}^2 - L$ ושהוחך: $U, V$ מרחבים קשירים.
נסמן בנוסף:
$$U' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -x < y\}$$
$$V' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -x > y\} .$$
באותה לוגיקה: $U' \cup V' = L'^c = \mathbb{R}^2 - L'$ ו- $U', V'$ מרחבים קשירים.

נסמן:

$W_1 = U;\ W_2 = W_1 \cup U'; W_3 = W_2 \cup V; W_4 = W_3 \cup V'$.

אזי (מומלץ לצייר!): $W_1 \subseteq W_2 \subseteq W_3 \subseteq W_4$ ;

$U = W_1$ - קשיר,

$\emptyset \neq W_1 \cap U' \Leftarrow W_2$ - קשיר. (ההרצאה האחרונה)

$\emptyset \neq W_2 \cap V \Leftarrow W_3$ - קשיר. (ההרצאה האחרונה)

$\emptyset \neq W_3 \cap V' \Leftarrow W_4$ - קשיר. (ההרצאה האחרונה).

אבל:

$$W_4 = U \cup U' \cup V \cup V' = (U \cup V) \cup (U' \cup V') =$$
$$L^c \cup {L'}^c = (L \cap L')^c = \{(0,0)\}^c = X$$

ז"א, הוחך ש-$X$ מרחב קשיר. <u>סתירה</u>.