תרגיל 4

1. תהי $A=\mathbb{R}\cup\{p\}$ עבור $p\notin\mathbb{R}$, עם הטופולוגיה הבאה: $\tau=P(\mathbb{R})\cup\{B\subseteq A:|B^c|\le\aleph_0\}$. הוכיחו שזוהי אכן טופולוגיה.
פתרון:

נבדוק את 3 התכונות:

1. $\emptyset\in P(\mathbb{R})$ ולכן $\emptyset\in\tau$. בנוסף, $|A^c|\le\aleph_0$ ולכן $A\in\tau$.

2. איחודים כלשהם: יהיו $O_i\in\tau$. אם כולן תת קבוצות של $\mathbb{R}$, אז כך גם האיחוד, ולכן הוא שייך לτ . אחרת, יש i כך ש$|O_i^c|\le\aleph_0$. אז מתקיים: $(\bigcup O_i)^c\subseteq O_i^c$, ולכן הוא בן מניה. מכאן ש$\bigcup O_i\in\tau$.

3. חיתוכים סופיים: יהיו $O_1,...,O_n\in\tau$. אם אחד מהם מוכל ב$\mathbb{R}$, אז כך גם החיתוך. אחרת, לכולם יש משלים בן מניה, ואז $|(O_1\cap...\cap O_n)^c|=|O_1^c\cup...\cup O_n^c|\le|O_1^c|+...+|O_n^c|\le\aleph_0$

2. (א) תהי X קבוצה עם הטופולוגיה הקו-סופית. נניח שיש קבוצה $A\neq\emptyset,X$ שהיא סגוחה. הוכיחו כי X סופית.

פתרון. בטופולוגיה הקו-סופית. קבוצה היא סגורה אם ורק אם היא סופית. אם A סגוחה אז A סגורה וגם A^c סגורה. כלומר A סופית וגם A^c סופית. ולכן $X=A\cup A^c$ גם סופית.

(ב) יהי (X,τ) מרחב טופולוגי אינסופי. נניח שהקבוצה הפתוחה האינסופית היחידה היא X. האם (X,τ) היא הטופולוגיה הטריויאלית? (למחשבה: האם יש דוגמא כזאת שבה יש אינסוף קבוצות פתוחות?)

פתרון. לא. כי אפשר לקחת כל קבוצה אינסופית X ואת $\tau=\{\emptyset,X,\{a\}\}$ כאשר $a\in X$. קל לבדוק שזו טופולוגיה. יש גם דוגמא עם אינסוף קבוצות פתוחות. ניקח $X=\mathbb{N}$. נסמן $A_n=\{m\in\mathbb{N}\mid m\le n\}$. כלומר $A_n=\mathbb{N}\cap(0,n]$. ברור שכל A_n היא קבוצה סופית. קל לוודא ש $\tau=\{A_n\}\cup\{\emptyset,\mathbb{N}\}$ היא אכן טופולוגיה.

3. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

(א) הטופולוגיה טריויאלית.

(ב) לכל סדרה x_n ו $x\in X$ מתקיים $x_n\to x$ (כל סדרה מתכנסת לכל מספר)

פתרון. נניח שהטופולוגיה טריויאילית. ניקח סדרה x_n כלשהיא ואיבר x. צריך להוכיח ש $x_n\to x$. תהי U קבוצה פתוחה כלשהיא כך ש $x\in U$. היות שהטופולוגיה טריויאלית, בהכרח $U=X$. ולכן בוודאי $\underline{x_n\in X}$ החל מ n מסוים (במקרה $n=1$)

ולכן $x_n \to X$. בכיוון השני, נניח שכל סדרה מתכנסת לכל מספר אבל הטופולוגיה לא טריויאלית. אז יש קבוצה פתוחה $U \neq \emptyset, X$ אז ניקח איזשהיא סדרה x_n שכל איבריה ב $X \backslash U$ ואיבר $x \in U$ אבל לפי הנתון $x_n \to x$ ולכן משלב מסוים $x_n \in U$ בסתירה.

4. נגדיר על $\mathbb{Z}$ את הטופולוגיה

$$\tau = \{O_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{Z}\}$$

כאשר

$$O_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$$

(א) הוכיחו כי $(\mathbb{Z}, \tau)$ אכן מרחב טופולוגי.

פתרון. צריך להוכיח את שלושת האקסיומות של מרחב טופולוגי.

i. איחוד של פתוחות הוא פתוח: נסתכל על איחוד $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ של פתוחות. את הקבוצות הריקות באיחוד הזה וודאי אפשר להשמיט. לכן נניח כי לכל $i \in I$ מתקיים $U_i \neq \emptyset$. אם האיחוד שווה לכל $\mathbb{Z}$ זו בוודאי קבוצה פתוחה. לכן ניתן להניח כי $\bigcup_{i \in I} U_i \subsetneqq \mathbb{Z}$ בפרט, אף אחת מהקבוצות הפתוחות האלה היא לא $\mathbb{Z}$.

לכן אפשר להניח שלכל $i \in I$ יש n_i כך ש $U_i = O_{n_i}$. ניקח $a \in \mathbb{Z}$ כך ש $a \notin U$. נשים לב ש a חסם מלרע של U כי אם $b \in U$ עם $b < a$ אז $b \in O_{n_i}$ עבור i כלשהוא ואז בוודאי $a \in O_{n_i} \subseteq U$. לכן U קבוצה של שלמים שחסומה מלרע ולכן יש לה מינימום, נסמן אותו $m = \min U$. כעת יש i כך ש

$$m \in O_{n_i}$$

נשים לב שכל איבר קטן מ m לא נמצא ב U (m מינימום כאמור). כל איבר גדול מ m כן נמצא ב U (כי הוא ב O_{n_i}) ולכן

$$U = O_m$$

שהיא קבוצה פתוחה כנדרש.

ii. חיתוך שתי קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה: נניח U ו V פתוחות. אם אחת מהן היא $\emptyset$ או $\mathbb{Z}$ הטענה מיידית. אחרת יש n, m כך ש

$$U = O_n \quad V = O_m$$

ואז ברור ש

$$U \cap V = O_{\max\{n,m\}}$$

שזו קבוצה פתוחה.

iii. $\emptyset, \mathbb{Z}$ הן קבוצות פתוחות: ברור מההגדרה.

(ב) מצאו סדרה שמתכנסת לכל איבר $n \in \mathbb{Z}$.

פתרון. ניקח את הסדרה $a_n = n$. יהי $x \in \mathbb{Z}$, נוכיח ש $a_n \to x$. תהי U קבוצה פתוחה כך ש $x \in U$. אם $U = \mathbb{Z}$ אז בוודאי $a_n \in \mathbb{Z}$ החל מ $n = 1$. אם $U = O_m$ אז $a_n \in U$ החל מ $n = m$. נשים לב ש $U \neq \emptyset$ כי $x \in U$.

(ג) האם קיימת סדרה שיש לה גבול יחיד? אם כן, תנו דוגמא. אם לא- הוכיחו.

פתרון. קיימת, למשל $a_n = 1$ סדרה זאת קבועה ולכן מתכנסת ל 1. נוכיח שזהו הגבול היחיד שלה. נניח בשלילה כי $a_n \to a \neq 1$ אז O_a סביבה פתוחה של a. לפי הגדרת הגבול ממקום כלשהוא $1 = a_n \in O_a$ אבל $1 \notin O_a$. סתירה.

5. תהי (X, τ_{cof}) קבוצה אינסופית עם הטופולוגיה הקו-סופית עליה.

(א) תהי $X \supseteq \{x_n\}$ סדרה. הוכיחו שמתקיים אחד מהבאים:

i. $\{x_n\}$ לא מתכנסת.

ii. ל$\{x_n\}$ יש גבול יחיד.

iii. $\{x_n\}$ מתכנסת לכל איבר ב X.

פתרון. נניח כי $\{x_n\}$ מתכנסת ואין לה גבול יחיד. נניח כי $x'' \neq x'$ גבולות שלה. נקבל כי לכל איבר $a \in X$ קיים מיקום n_a שהחל ממנו הסדרה שונה מ a. הוכחה: יהא $a \in X$ אזי $\{a\}^c$ הוא סביבה פתוחה של x' או x'' ולכן לפי הגדרת הגבול החל ממקום מסוים כל איברי הסדרה נמצאים ב $\{a\}^c$ כלומר לא שווים ל a. כעת נוכיח כי כל $x \in X$ הוא גבול שלה. יהא $x \in X$ נתון ויהא U סביבה פתוחה של x. לפי הגדרת הטופולוגיה U^c סופי ולכן נוכל להגדיר $N = \max\{n_a | \, a \in U^c\}$ ולקבל כי החל ממיקום N איברי הסדרה $\{x_n\}$ שונים מכל איברי U^c ולכן בפרט ממקום זה איברי $\{x_n\}$ שייכים ל U כנדרש.

(ב) יהי Y מרחב טופולוגי מטריזבילי, ותהי $f : X \to Y$ פונקציה רציפה. הוכיחו שf קבועה.

פתרון. נבחר תת קבוצה $\{x_n\}$ מעוצמה $\aleph_0$ ש ל X. טענה: $\{x_n\}$ כסדרה מתכנסת לכל איבר ב X. הוכחה: יהא $x \in X$ ותהא U סביבה פתוחה של x. מהגדרה U^c סופית ולכן ממקום כלשהוא בסדרה , איברי הסדרה$\{x_n\}$ נמצאים ב U כנדרש. כעת אם $x_n \to x$ אזי $f(x_n) \to f(x)$ כיוון ש f רציפה. כיוון שכל $x \in X$ הוא גבול של הסדרה $\{x_n\}$ נקבל כי כל $x \in X$ מקיים כי $f(x)$ הוא גבול של הסדררה $\{f(x_n)\}$. במרחב מטריזבילי הגבול יחיד ל $\{f(x_n)\}$ גבול יחיד שנסמנו y ומכאן נקבל שכל $x \in X$ מקיים $f(x) = y$.

(ג) הוכיחו ש(X, τ_{cof}) אינו מטריזבילי. (הוכיחו שבעבור קבוצה סופית הטופולוגיה הקוסופית היא מטריזבילית)

פתרון. במקרה ש X סופית אזי הטופולוגיה הקו-סופית מתלכדת עם הטופלוגיה הדיסקטית שהיא מטרזבילית. במקרה שלנו, X אינה סופית ונוכיח כי הוא אינו מטרזבילי. נניח בשלילה כי הוא מטרזבילי אזי $Id : X \to X$ רציפה ואינה קבועה. סתירה לסעיף הקודם.

6. הוכיחו שהרכבה של פונקציות רציפות היא רציפה.

פתרון. נניח כי $f:X\to Y,g:Y\to Z$ רציפות (X,Y,Z מרחבים טופולוגיים). יהא U פתוחה ב Z ונרצה להוכיח כי $\left(g\circ f\right)^{-1}\left(U\right)$ פתוחה ב X אכן $g^{-1}(U)$ פתוחה ב Y כי g פתוחה ואז $f^{-1}(g^{-1}(U))$ פתוחה ב X כי f רציפה. כיוון ש

$$\left(g\circ f\right)^{-1}\left(U\right)=f^{-1}(g^{-1}(U))$$

סיימנו.

7. תהי τ טופולוגיה כלשהי על $\mathbb{R}$, ויהיו $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות (לפי הטופולוגיה τ). הוכיח/הפריכו: $f+g$ רציפה.

פתרון. הפרכה: ניקח את הטופולוגיה $\tau=\{\emptyset,\mathbb{R},\{2\}\}$ ונסתכל על הפונקציה $f=g=id$ שרציפות. טענה: $f+g$ אינה רציפה. הוכחה: $\left(f+g\right)\left(x\right)=x+x=2x$ ולכן התמונה ההפוכה של הקבוצה הפתוחה $\{2\}$ צריכה להיות פתוחה אבל $\left(f+g\right)^{-1}\left(\{2\}\right)=\{1\}$ שאינה פתוחה.