תרגיל בית 9 – טופולוגיה

**שאלה 1**

הוכיחו או הפריכו:

1. ;
2. .

**שאלה 2**

יהי  מרחב טופולוגי עם התכונה הבאה: לכל נקודה קיימת סביבה קשירה מסילתית. הוכיחו שכל מרכיב קשירות מסילתית הוא קבוצה פתוחה. הסיקו שכל מרכיב קשירות מסילתית הוא גם קבוצה סגורה.

**שאלה 3**

1. הוכיחו שכל מרחב טופולוגי דיסקרטי הוא קומפקטי אמ"מ הוא סופי.
2. יהי  מ"ט קומפקטי. יהי  אוסף קבוצות סגורות, כך שכל חיתוך סופי של קבוצות מאוסף זה אינו ריק. הוכיחו ש- .

**שאלה 4**

1. יהי  מרחב טופולוגי. יהיו  תת-מרחבים קומפקטיים של . הוכיחו ש- הוא קומפקטי.
2. מצאו דוגמה נגדית כאשר מדובר באינסוף תת-מרחבים קומפקטיים.
3. יהי  מ"ט האוסדורף. יהי  אוסף כלשהו של תת-מרחבים קומפקטיים. הוכיחו כי  קומפקטי.

**שאלה 5**

תהי  פונקציה חח"ע ועל.

1. הוכיחו שאם  פתוחה או סגורה ואם  הוא האוסדורף אזי  הוא האוסדורף.
2. הוכיחו שאם  רציפה ו-  האוסדורף, אזי  האוסדורף.

**שאלה 6**

יהי  מרחב טופולוגי האוסדורף. יהי  אוסף של תת-מרחבים קומפקטיים לא ריקים כך שמתקיים . הוכיחו ש-. תנו דוגמה נגדית למקרה שהתת-מרחבים אינם קומפקטיים.

**שאלה 7**

1. יהי  מרחב טופולוגי אינסופי המקיים את התכונה הבאה: כל תת-מרחב הוא קומפקטי. הוכיחו ש- אינו האוסדורף.
2. יהי  מרחב טופולוגי שאינו בן מניה ואינו קומפקטי. הוכיחו שקיים ב- מספר לא בן מניה של תת-מרחבים קומפקטיים ומספר לא בן מניה של תת-מרחבים לא קומפקטיים.
3. יהי  מרחב טופולוגי, כך שכל תת-מרחב סגור לא טריוויאלי הוא קומפקטי. הוכיחו ש- קומפקטי.

**בהצלחה!**