

84-172 מתמטיקה ב' לכימאים – בוחן אמצע – תשפ"ב

שאלה 1

נביט במערכת המשוואות הבאה עם הנעלמים x, y, z, w והפרמטר a , בשדה המספרים הממשיים.

$$\begin{cases} x + y + z + aw = 1 \\ ax + ay + a^2z + (1 + a^2)w = 2a \\ x + y + z + (a^2 + a - 1)w = a^2 + a + 1 \end{cases}$$

סעיף א': (18 נק')

מצאו לכל ערכי הפרמטר a אם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות כלל

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ a & a & a^2 & 1+a^2 & 2a \\ 1 & 1 & 1 & a^2+a-1 & a^2+a+1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 - aR_1 \\ R_3 - R_1}} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2-a & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & a^2-1 & a^2+a \end{array} \right)$$

אם $a^2 - a, a^2 - 1 \neq 0$ כלומר

$$a \neq \pm 1, 0$$

אזי יש לנו מטריצה מדורגת, בלי שורת סתירה, עם משתנה חופשי (השני) ולכן יש אינסוף פתרונות.

נציב את שלושת הערכים שנותרו.

נתחיל מ- $a = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

זה לא מדורג, נמשיך לדרג

$$\xrightarrow{R_3 + R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

זו צורה מדורגת, ללא שורת סתירה, עם שני משתנים חופשיים, ולכן אינסוף פתרונות.

כעת $a = 1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

כאן קיבלנו שורת סתירה ולכן אין פתרונות.

לבסוף נציב $a = -1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

זו מטריצה מדורגת, ללא שורת סתירה, עם שני משתנים חופשיים, ולכן אינסוף פתרונות.

סה"כ $a \neq 1$ יש אינסוף פתרונות, עבור $a = 1$ אין פתרונות.

סעיף ב': (10 נק')

מצאו את הפתרון הכללי למערכת עבור $a = -1$

נמשיך את הדירוג מסעיף קודם במצב זה לקנוני:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

זה מדורג קנוני!

המשתנים החופשיים הם y, w נציב בהם פרמטרים

$$y = t$$

$$w = s$$

ונקבל

$$x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}s - t$$

$$z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}s$$

סה"כ הפתרון הכללי הוא

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}s - t, t, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}s, s\right) = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0\right) + s\left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 1\right) + t(-1, 1, 0, 0)$$

סעיף ג': (10 נק')

מצאו את הפתרון הכללי למערכת עבור $a = 2$

נציב $a = 2$ בגרסא הכי מדורגת שאפשר ונמשיך לדירוג קנוני:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 - \frac{1}{2}R_3 \\ R_1 - 2R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

זו צורה מדורגת קנונית, y משתנה חופשי ונציב בו $y = t$

ונקבל סה"כ

$$x = -3 - t$$

$$y = t$$

$$z = 0$$

$$w = 2$$

$$(-3 - t, t, 0, 2) = (-3, 0, 0, 2) + t(-1, 1, 0, 0)$$

שאלה 2

נביט בהעתקה הלינארית $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ המקיימת

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$$

$$T(0, 1, 0) = (0, 1, 1)$$

$$T(1, 0, 1) = (1, 0, 1)$$

סעיף א': (5 נק')

מצאו את המטריצה המייצגת $[T]$

צריך להפעיל את הפונקציה על איברי הבסיס הסטנדרטי

$$T(1, 0, 0)$$

$$T(0, 1, 0)$$

$$T(0, 0, 1)$$

השניים הראשונים נתונים, אבל השלישי לא.

$$T(0, 0, 1) = T(1, 0, 1) - T(1, 0, 0) = (1, 0, 1) - (1, 0, 0) = (0, 0, 1)$$

סה"כ

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

סעיף ב': (15 נק')

הוכיחו כי המטריצה המייצגת הפיכה ומצאו את $[T]^{-1}$ ההופכית.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$[T]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

סעיף ג': (3 נק')

מצאו את $T(1, 2, 3)$

$$T(1, 2, 3) = [T] \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

סעיף ד': (15 נק')

יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$ פרמטרים, מצאו וקטור (x, y, z) כך ש $T(x, y, z) = (a, b, c)$. הביעו את תשובתכם באמצעות הפרמטרים.

בעצם מבקשים מאיתנו למצוא את

$$T^{-1}(a, b, c)$$

ידוע ש

$$[T] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = [T]^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c - b \end{pmatrix}$$

שאלה 3

סעיף א': (15 נק')

מצאו את כל הפתרונות בשדה המרוכבים למשוואה $z^2 + 2z + 1 = (1 + i)^2$

נפתור בעזרת טריק

$$(z + 1)^2 = (1 + i)^2$$

לכן

$$z + 1 = \pm(1 + i)$$

$$z = i, -2 - i$$

כעת נפתור ללא טריק

$$z^2 + 2z + 1 - (1 + i)^2 = 0$$

$$z^2 + 2z + 1 - 1 - 2i + 1 = 0$$

$$z^2 + 2z + 1 - 2i = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1 - 2i)}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 - (1 - 2i)} = -1 \pm \sqrt{2i}$$

מה זה $\sqrt{2i}$?

$$w^2 = 2i = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$w = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2}\right)$$

$$k = 0, 1$$

$$w_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i$$

$$w_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -1 - i$$

$$-1 \pm \sqrt{2i} = -1 \pm (1 + i)$$

זה מוביל (לא במפתיע) לאותה תוצאה בדיוק.

סעיף ב': (15 נק')

מצאו את כל הפתרונות בשדה המרוכבים למשוואה $iz^5 = 1 + 2i$

נכפול בצמוד של המקדם, כלומר ב- i

$$z^5 = -i + 2$$

$$z^5 = 2 - i$$

$$r = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\theta = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right)$$

לוקחים את $\arctan$ בלי להוסיף π כיוון שהחלק הממשי 2 הוא חיובי והפתרונות הם

$$z_k = \sqrt[5]{\sqrt{5}} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{5}\right)$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4$$

סעיף ג': (8 נק')

מצאו את הזווית בין הוקטורים $(1, 1, 1)$, $(1, -1, \sqrt{6})$

נזכור

$$\cos(\theta) = \frac{(1, -1, \sqrt{6}) \cdot (1, 1, 1)}{|(1, -1, \sqrt{6})| \cdot |(1, 1, 1)|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 6} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{8 \cdot 3}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$