# (88132) חשבון אינפינטסימלי 1 | מבחן תשע"ה מועד א'

הצעת פתרון | לירן מנצורי ויונתן סמידוברסקי

### שאלה 1

הוכח את המשפט הבא: תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$ המקיימת $f(a) < 0 < f(b)$. הוכח שקיים מספר $c$ בקטע $[a,b]$ כך ש $f(c) = 0$.

נוכיח את משפט ערך הביניים ואז נפעיל אותו על המקרה שלנו.

משפט ערך הביניים אם $f$ רציפה בקטע $[a,b]$ ו$f(a) < f(b)$ אז לכל מס' ממשי $f(a) < d < f(b)$ יש נק' $a < c < b$ כך ש$f(c) = d$.

הוכחה ניזכר שאם קיים $s := supA$ אז יש $s \geq a_n \in A$ כך ש$a_n \to s$

יהי $c := sup\{x \in [a,b] | f(x) \leq d\}$ (הקבוצה חסומה ע"י $b$ ואינה ריקה כי למשל $f(a) < d$, ולכן קיים לה סופרמום)

כעת תהי $c \geq x_n \to c$ מהקבוצה, מרציפות מתקיים $d \geq f(x_n) \to f(c)$. גבולות שומרים על אי שיוויון- חלש ולכן $f(c) \leq d$.

נניח בשלילה $f(c) < d$, כעת $f(c) < f(b)$ ובפרט $c \neq b$ ולכן $c < b$.

תהי $c^+ \leftarrow t_n > b$ אזי $f(t_n) \to f(c) < d$ ולבסוף $f(t_n) \leq d$ למרות ש$c < t_n$ בסתירה לכך שהוא $sup$.

ובמקרה שלנו מתקיים כי היא רציפה בקטע, וכן $f(a) < f(b)$, כמו כן, $d = 0$ מס' ממשי המקיים $f(a) < d < f(b)$ ולכן קיימם $a < c < b$ כך ש$f(c) = d = 0$.

**שאלה 2**

לכל אחד מהטורים הבאים, קבעו האם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר.

**א.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-2n-1}{4n^4-5n^2-6}$.

**ב.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n!}}$.

**ג.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-6\sin n+5}$.

## (א)

ננסה התכנסות בהחלט

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|3n^2-2n-1|}{|4n^4-5n^2-6|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(3n+1)(n-1)|}{|\left(4n^2+3\right)\left(n^2-2\right)|}$$

נסתכל על $n \geq 2$, וזה לא משפיע על התכנסות ואז

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(3n+1)(n-1)}{\left(4n^2+3\right)\left(n^2-2\right)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n^2-2n-1}{\left(4n^2+3\right)\left(n^2-2\right)} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n^2}{\left(4n^2+3\right)\left(n^2-2\right)} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n^2}{(4n^2+3)n^2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n^2}{4n^4} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{4n^2} < \infty$$

ולכן **מתכנס בהחלט.**

## (ב)

נשים לב שהטור חיובי, ומנוחות נסתכל על זנב החל מ$n \geq 2$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n!}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(n-1)!}} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

ולפי מבחן ההשוואה **מתבדר**.

## (ג)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-6sin(n)+5}$$

ראשית נראה שאינו מתכנס בהחלט
כי

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n-6sin(n)+5|} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n+6+5|} = \sum_{n-1}^{\infty} \frac{1}{n+11}$$

והחל משלב מסויים $\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{n+11}$ ולכן טור הערכים המוחלטים מתבדר ביחד עם הטור ההרמוני.
קל להראות כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+5}$ מתכנס (מלייבניץ), ואז

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n-6sin(n)+5} - \frac{(-1)^n}{n+5}] = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+5-(n-6sin(n)+5)}{(n-6sin(n)+5)(n+5)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{6sin(n)}{(n-6sin(n)+5)(n+5)}$$

ממשפט מהרצאה (צירוף ליניארי של טורים) נובע כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+5}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{6sin(n)}{(n-6sin(n)+5)(n+5)}$ מתכנסים- גם הטור שלנו.
נוכיח $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{6sin(n)}{(n-6sin(n)+5)(n+5)} < \infty$
נראה התכנסות בהחלט, זה יוכיח

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|6sin(n)|}{|(n-6sin(n)+5)||(n+5)|}$$

נסתכל על $n \geq 2$, הורדה של מס' סופי של איברים מסדרת הסכומים החלקיים לא משפיעה על התכנסותו.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|6sin(n)|}{|(n-6sin(n)+5)||(n+5)|} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|6sin(n)|}{|(n-1)||(n+5)|}$$

משום ש $n-6sin(n)+5 \geq n-6+5 = n-1$, הקטנו את המכנה ולכן הביטוי גדול יותר.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|6sin(n)|}{|(n-1)||(n+5)|} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6}{(n-1)(n+5)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6}{n^2+4n-5} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6}{n^2} < \infty$$

ולכן סיימנו. הטור **מתכנס בתנאי.**

## שאלה 3

יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות המוגדרות בכל $\mathbb{R}$, ומקיימות $\lim_{x\to a} f(x) = b$, ובנוסף $\lim_{y\to b} g(y) = c$.

**א.** נתבונן בפונקציה

$$h(y) := \begin{cases} g(y) & y \neq b \\ c & y = b \end{cases}.$$

**הוכח:** $\lim_{x\to a} h(f(x)) = c$.

**ב.** הפרך, על ידי דוגמא נגדית, את הטענה $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.

## (א)

נשים לב שמתקיים כי הרכבת הפונקציות

$$h(f(x)) = \begin{cases} g(f(x) & f(x) \neq b \\ c & f(x) = b \end{cases}$$

כעת נוכיח בלשון היינה, תהי $a \neq x_n \to a$, נחלק למקרים:
בעצם נרצה לפצל לשתי ת"ס,
ת"ס ראשונה: כל האיברים כך ש $f(x_{n_k}) \neq b$
ת"ס שנייה: כל האיברים כך ש $f(x_{n_k}) = b$
פורמלית לא ניתן לעשות את זה במקרה שכמות האיברים באחת מהן סופית, לכן נפצל למקרים
- אם יש אינסוף איברים מתת הסדרה הראשונה ומס' סופי של איברים מתת הסדרה השנייה,
נסתכל על זנב של הסדרה $t_n$ שהוא ת"ס של תת הסדרה הראשונה.
- אם יש אינסוף איברים מתת הסדרה השנייה ומס' סופי של איברים מתת הסדרה הראשונה,
נסתכל על זנב של הסדרה $k_n$ שהוא ת"ס של תת הסדרה השנייה.
- אם יש אינסוף איברים בכל אחת מתת הסדרות, יחדיו הן מכסות את הסדרה ואם נוכיח ששתיהן מתכנסות ל$c$ נסיים.
סך הכל, כדי להוכיח את כל המקרים נראה $h(f(t_n)) \to c, h(f(k_n)) \to c$.
ראשית, $a \neq t_n \to a$ ומהגדרת תת הסדרה מתקיים $b \leftarrow f(t_n) \neq b$. כעת $h(f(t_n)) = g(f(t_n)) \to c$
ובנוסף, $a \neq k_n \to a$ ומהגדרת תת הסדרה מתקיים $f(k_n) = b$ ובפרט $h(f(k_n)) = h(b) = c \to c$
וסיימנו.

## (ב)

ניקח את הפונקציות $f(x) = b, g(y) = \begin{cases} c & y \neq b \\ c+1 & y = b \end{cases}$
ואז

$$lim_{x\to a} f(x) = b$$

$$lim_{y \to b} g(y) = c$$

הראשון ברור, השני נובע מלשון היינה. לוקחים $b \neq y_n \to b$ ואז $f(y_n) = c \to c$.
אבל

$$lim_{x \to a} g(f(x)) = (g \circ f)(x) = c + 1 \neq c$$

משום ש

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} c & f(x) \neq b \\ c+1 & f(x) = b \end{cases}$$

ואם לוקחים $a \neq a_n \to a$ מקבלים $(g \circ f)(a_n) \to c + 1$.

**שאלה 4**

**א.** תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. הגדר את המינוח "הפונקציה $f(x)$ **רציפה במידה שווה** בתחום $A$."

**ב.** תהי $f(x)$ פונקציה רציפה במידה שווה בקרן $(0,\infty)$, המקיימת $1 < f(x)$ לכל $x \in (0,\infty)$.

הוכח שהפונקציה $\sqrt{f(x)}$ רציפה במידה שווה בקרן $(0,\infty)$.

## (א)

$f$ רציפה במידה שווה בתחום $A$ אם $A \subseteq dom(f)$ וכן $\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x_1,x_2\in A,|x_1-x_2|\le\delta} : |f(x_1)-f(x_2)| < \epsilon$

(בחרתי באחד הניסוחים השקולים שלה שיהיה לנו יותר נוח לעבוד איתו)

## (ב)

ראשית, $f(x) > 1$ בקטע הרצוי ולכן $\sqrt{f(x)}$ מוגדרת בקטע $A = (0,\infty)$.

כעת יהי $\epsilon > 0$, נמצא $\delta > 0$ שיקיים שלכל $x_1, x_2 \in A$ וכן $|x_1 - x_2| \le \delta$ יתקיים $|\sqrt{f(x_1)} - \sqrt{f(x_2)}| < \epsilon$

<u>חיפוש הערך המתאים</u>

משום ש$f(x)$ רציפה במידה שווה, ניקח את אותו ה$\epsilon$ ואז קיים $\delta'$ כך שלכל $x_1, x_2 \in (0,\infty)$ המקיימים $|x_1 - x_2| \le \delta'$ מתקיים ו

$$\epsilon > |f(x_1) - f(x_2)| = |(\sqrt{f(x_1)} - \sqrt{f(x_2)}) \cdot (\sqrt{f(x_1)} + \sqrt{f(x_2)}) \ge \sqrt{f(x_1)} - \sqrt{f(x_2)}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך ש$f(x_1), f(x_2) > 1$ ובפרט $1 < \sqrt{f(x_1)} + \sqrt{f(x_2)}$.

לכן לוקחים $\delta := \delta'$ וסיימנו.

**שאלה 5**

**א.** צטט את משפט רול לגבי התאפסות הנגזרת בקטע.

**ב.** הוכח שלפונקציה $f(x) = 1-(x-1)^{2/3}$ אין נקודה בקטע $[0,2]$ שבה הנגזרת מתאפסת. הסבר מדוע אין עובדה זו סותרת את משפט רול.

## (א)

תהי $f$ פונקציה רציפה ב$[a,b]$ וגזירה ב$(a,b)$ כך שמתקיים $f(a)=f(b)$ אזי קיימת $a<c<b$ כך ש$f'(c)=0$.

## (ב)

אמנם, קל לוודא $f(2)=f(0)$ וכי הפונקציה רציפה בקטע $[0,2]$ אבל נראה שהיא לא בהכרח גזירה בקטע $(0,1)$ מתקיים כי

$$f'(x) = -\frac{2}{3}(x-1)^{-1/3} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

ולמשל עבור $x=1$, $f'(1)$ אינה מוגדרת ואף לא גזירה (הגבול לא קיים), לכן סיימנו.