

מטלה וירטואלית – אנליזה מתקדמת ומד"ר

מטרת מטלה זו היא להכין אתכם לסמסטר. אמנם השאלות הן על נושאים שלא למדנו עד כה, אך הן אינן דורשות כלים מתקדמים אלא שימוש בהגיון מתמטי בלבד.

את המטלה יש להגיש ביום רביעי 18/03/20.

נעסוק בפונקציות המקבלות שני משתנים.

למשל $f(x, y) = 4x + xy$, בנק' $(1, 2)$ מקבלת את הערך $f(1, 2) = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 6$.

כמו כן, $f(0, 0) = 0$.

חלק א'

- מצאו את הנקודה (x, y) עבורה הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2$ מקבלת את הערך הנמוך ביותר.
- הראו כי לפונקציה $f(x, y) = xy$ אין נקודת מינימום מקומי.
- חשבו את $f(t, a \cdot t)$ עבור הפונקציה $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. הביעו את תשובתכם באמצעות הפרמטרים a, t .
- מצאו את אוסף כל הנקודות עבורן גובה הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2$ הוא בדיוק 4. מה הצורה הגאומטרית של אוסף זה?
בנוס (לא חובה): האם אתם יכולים לדמיין כיצד נראה גרף הפונקציה הזו? חפשו בגוגל $x^2 + y^2$ ותראו.

חלק ב'

ניתן לגזור פונקציה בשני משתנים לפי אחד המשתנים. פשוט מתייחסים למשתנה השני כפרמטר קבוע.

לדוגמא: הנגזרת לפי x של $f(x, y) = xy + x + y$ היא $f_x(x, y) = y + 1$
בדיוק כפי שבחדו"א שלמדנו במשתנה אחד מתקיים כי $(ax + x + a)' = a + 1$

דוגמאות נוספות:

- עבור הפונקציה $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ הנגזרות הן $f_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$ וכן $f_y(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$.
- עבור הפונקציה $f(x, y) = x^y$ הנגזרות הן $f_x(x, y) = yx^{y-1}$ וכן $f_y(x, y) = x^y \ln(x)$.
- עבור הפונקציה $f(x, y) = xe^{xy}$ הנגזרות הן $f_x(x, y) = e^{xy} + x(ye^{xy})$ וכן $f_y(x, y) = x^2 e^{xy}$.

מצאו את הנגזרות לפי שני המשתנים של הפונקציות הבאות:

5. $f(x, y) = x^2 + y^3 + 2xy^2 + x + 4$

6. $f(x, y) = \sin(x^2 y)$

7. $f(x, y) = \sin^2(xy)$

8. $f(x, y) = \cos(x) e^{xy}$

9. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$