

שעת קבלה א שבת תשפ"א

14 בינואר 2021

1 קומבי

1. הדחליל: נסמן בקבוצה A_1 את כל השבילים בהם האבנים b_1, y_1 אחת ליד השנייה. כך לכל $1 \leq i \leq k$. ואז צריך לחשב:

$$U$$

$$|A_i| = 2(2k-1)(2k-2)!$$

$$|A_i \cap A_j|$$

וכאן מתחיל להיות קשה, כי צריך לחשב חיתוך של m קבוצות לכל $1 \leq m \leq k$.

2. האריה: הבנו שמספר האבנים זוגי. נניח שיש לנו שביל כשר באורך $n-2$. מה האפשרויות להוסיף שתי אבנים?

$$(r, r), (y, b), (b, y), (y, y), (b, b)$$

לכן, למשל יש $f(n-2)$ שבילים הנגמרים ב- (r, r) .
נוותר לבדוק כמה שבילים כשרים באורך n יש ששתי האחרונות הן

$$(r, y), (y, r), (r, b), (b, r)$$

לדוגמא עבור סדרה כשרה שמסתיימת ב- (r, y) :

$$(r, b, b, y, r, y)$$

שאלה מכוונת: האם יש סדרה לא כשרה שכשנוסיף לה את (r, y) היא עדיין תהיה לא כשרה? תסבירו למה אין כזו. כלומר, מספר השבילים הכשרים באורך n המסתיימים בלמשל (r, y) הוא כמספר השבילים הפסולים באורך $n-2$.

2 לינאריות

1. תשע"ד מועד ב שאלה 6: מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m \times 4}$ נתון: שורות בת"ל, ויש 2 משתניים חופשיים. מצאו את m .

פתרון: מהעובדה שיש שני משתנים חופשיים נקבל $\dim N(A) = 2$, כיון שמתקיים: $\dim N(A) + \text{rank}(A) = 4$ אז $\text{rank}(A) = 2$ ולכן: $\dim R(A) = \text{rank}(A) = 2$ וכיון שהשורות בת"ל נקבל $m = 2$.

2. הגדרות עבור מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$:

(א) מרחב השורות: $R(A) = \text{span}\{R_1(A), \dots, R_m(A)\}$ והוא נפרש גם ע"י השורות השונות מאפס בצורה המדורגת של A .

(ב) מרחב העמודות: $C(A) = \text{span}\{C_1(A), \dots, C_n(A)\}$ והוא נפרש גם ע"י העמודות במטריצה המקורית A , המתאימות לאיבר מוביל בצורה המדורגת.

(ג) מרחב האפס: $N(A) = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = 0\}$

3. שאלה ממבחן כלשהו: תהינה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times k}$. הוכיחו: $AB = 0 \iff C(B) \subset N(A)$.

פתרון: $\Leftarrow$: נתון לנו $C(B) \subset N(A)$, צ"ל: $AB = 0$. נראה שלכל $1 \leq j \leq k$ מתקיים $C_j(AB) = 0$, ואכן, לפי כפל עמודה:

$$C_j(AB) = A \cdot C_j(B)$$

זו עמודה של B וכיון שמרחב העמודות מוכל במרחב האפס, בספרט כל עמודה שייכת למרחב האפס, כלומר $C_j(B) \in N(A)$ ולכן $A \cdot C_j(B) = 0$, ובסה"כ:

$$C_j(AB) = A \cdot C_j(B) = 0$$

$\Rightarrow$: נתון $AB = 0$, צ"ל $C(B) \subset N(A)$. ט.ע.: $N(A)$ הוא מרחב וקטורי, ולכן סגור תחת צירופים לינאריים. לכן מספיק להוכיח על כל עמודה $C_j(B) \in N(A)$, ואכן:

$$0 = C_j(AB) = A \cdot C_j(B)$$

4. אם נתון $|A| = 1$ מה אפשר לומר? לא נראה שמשווא מיוחדת:

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. תשע"ד מועד א שאלה 6: $V = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \text{tr}(A) = 0\}$. מצאו את המימד. פתרון: נשים לב שכל מטריצה שבה האלכסון הוא 0, מקיימת את התנאי.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

נשים לב שהמטריצות

$$E_{ij} = \begin{cases} 1 & ij \\ 0 & else \end{cases}$$

הן בת"ל, ויש $n^2 - n$ מטריצות כאלה, עם 0 בכל האלכסון. בנוסף, נוכל לקחת עוד $n - 1$ מטריצות בת"ל מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

כלומר, יש 1 באחד מרכיבי האלכסון A_{ii} עבור $1 \leq i \leq n - 1$ ובנוסף $A_{nn} = -1$. וכל השאר 0. בסה"כ אספתי עד כה:

$$n^2 - n + (n - 1) = n^2 - 1$$

מטריצות לבסיס. אין יותר, כי את מרחב המטריצות כולו פורשות n^2 מטריצות, ואנחנו יודעים שיש מטריצות עם עקבה שונה מאפס, כמו למשל ממטריצת היחידה.