מתמטיקה לכימאים פתרון תרגיל 5

עוזי חרוש ועולא אמארה

תרגיל 1. חשב את טורי טיילור של הפונקציות הבאות:

1. $f(x) = \cos(x)$

פתרון. נתחיל לחשב את הנגזרות ב-0 ונקבל

$$\begin{array}{ccc}
f(x) = \cos(x) & \Rightarrow & f(0) = 1 \\
f'(x) = -\sin(x) & \Rightarrow & f'(0) = 0 \\
f''(x) = -\cos(x) & \Rightarrow & f''(0) = -1 \\
f'''(x) = \sin(x) & \Rightarrow & f'''(0) = 0 \\
f^{(4)}(x) = \cos(x) & \Rightarrow & f^{(4)}(0) = 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

לכן

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n}$$

2. $f(x) = \ln(x+1)$

פתרון. נתחיל לחשב את הנגזרות ב-0 ונקבל

$$\begin{array}{ccc}
f(x) = \ln(x+1) & \Rightarrow & f(0) = 0 \\
f'(x) = \frac{1}{x+1} & \Rightarrow & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} & \Rightarrow & f''(0) = -1 \\
f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} & \Rightarrow & f'''(0) = 2! \\
f^{(4)}(x) = -\frac{2\cdot 3}{(x+1)^n} & \Rightarrow & f^{(4)}(0) = -3! \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n} & \Rightarrow & f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!
\end{array}$$

לכן

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

3. $f(x)=\frac{1}{1+x}$

פתרון. נתחיל לחשב את הנגזרות ב-0 ונקבל

$$\begin{array}{ccc} f(x)=\frac{1}{1+x} & \Rightarrow & f(0)=1 \\ f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2} & \Rightarrow & f'(0)=1 \\ f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3} & \Rightarrow & f''(0)=2! \\ f'''(x)=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4} & \Rightarrow & f'''(0)=3! \\ f^{(4)}(x)=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^4} & \Rightarrow & f^{(4)}(0)=4! \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(1-x)^{n+1}} & \Rightarrow & f^{(n)}(0)=(-1)^n(n)! \end{array}$$

לכן

$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

תרגיל 2. בעזרת התרגיל הקודם חשבו את טורי טיילור של הפונקציות הבאות

1. $f(x)=\frac{x^m}{1-x}$

פתרון. נשים לב שמתקיים

$$f(x)=\frac{x^m}{1-x}=x^m\frac{1}{1-x}$$

לכן ניתן להעזר בתרגיל הקודם ולקבל ש-

$$T(x)=x^m\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+m}=\sum_{n=m}^{\infty}x^n$$

2. $f(x)=\frac{1}{9+x^2}$

פתרון. נזכר ש-

$$T_{\frac{1}{1+x}}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

ו-

$$f(x)=\frac{1}{9+x^2}=\frac{1}{9}\frac{1}{1+\frac{1}{9}x^2}=\frac{1}{9}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}x\right)^2}$$

לכן

$$T(x)=\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\left(\frac{1}{3}x\right)^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{2n+2}}x^{2n}$$

3. $f(x)=\ln\left(1+x-2x^2\right)$ רמז: $1+x-2x^2=(1-x)(1+2x)$

פתרון. נזכר ש-

$$T_{\ln(x+1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

ו-

$$f(x) = \ln\left(1 + x - 2x^2\right) = \ln(1-x)(1+2x) = \ln(1-x) + \ln(1+2x)$$

לכן

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-x)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (2x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1+2^n)}{n} x^n$$

תרגיל 3. חשב את הביטויים הבאים פיתוח טור טיילור עד סדר חמישי והשווה אותו למספר האמיתי בעזרת המחשבון

1. $\sin\frac{\pi}{6}$(שימו לב שזה ברדיאנים)

פתרון. נזכר ש-

$$T_{\sin(x)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

לכן טור טיילור מסדר חמישי יתן לנו

$$\sin\frac{\pi}{6} \approx \sum_{n=0}^{4} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n+1} = \frac{1}{1}\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{1}{5!}\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)^5 - \frac{1}{7!}\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)^7 + \frac{1}{9!}\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)^9 = 0.4824$$

בעוד

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

2. $\frac{1}{e}$

פתרון. נזכר ש-

$$T_{e^x}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

לכן טור טיילור מסדר חמישי יתן לנו

$$e^{-1} \approx \sum_{n=0}^{4} \frac{1}{n!} (-1)^n = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = 0.375$$

בעוד

$$e^{-1} = 0.3679$$

3. $\ln 1.5$

פתרון. נזכר ש-

$$T_{\ln(x+1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

לכן טור טיילור מסדר חמישי יתן לנו

$$\ln(0.5+1) \approx \sum_{n=1}^{5} \frac{(-1)^{n-1}}{n} 0.5^n = 0.5 - \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{3} - \frac{0.5^4}{4} + \frac{0.5^5}{5} = 0.4072$$

בעוד

$$\ln 1.5 = 0.4055$$

4. $\ln 4$ מה המסקנה שלך לגבי התוצאה במקרה זה?

פתרון. נזכר ש-

$$T_{\ln(x+1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

לכן טור טיילור מסדר חמישי יתן לנו

$$\ln(3+1) \approx \sum_{n=1}^{5} \frac{(-1)^{n-1}}{n} 3^n = 3 - \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{3} - \frac{3^4}{4} + \frac{3^5}{5} = 35.85$$

בעוד

$$\ln(4) = 1.3863$$

המקרה זה שארית טור אינה מתכנסת ל-0 לכן טור טיילור לא יודע להעריך את ערך הפונקציה.