

תרגילים

1. מצא את הטור פוריה של כל אחת מן הפונקציות הבאות בקטע $[-\pi, \pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ e^x, & 0 < x \leq \pi \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א. } f(x) = |\sin x|$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq \pi \end{cases} \quad \text{ד.} \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\pi < x < 0 \\ \sin x, & 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{ג.}$$

2. עבור כל ממשי $-\pi \leq p \leq \pi$, מצא את הטור פוריה של הפונקציה

$$f_p(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq p \\ 1, & p < x \leq \pi \end{cases}$$

3. תהי f פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית 2π ויהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$.

א. נגדיר $g(x) = f(x + \pi)$, לכל $x \in \mathbb{R}$, ויהי

$$g(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos nx + B_n \sin nx]$$

הטור פוריה של g בקטע $[-\pi, \pi]$. בטא את A_n ו- B_n על ידי a_n ו- b_n .

ב. נגדיר $h(x) = f(x) \cos x$, ויהי

$$h(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx]$$

הטור פוריה של h בקטע $[-\pi, \pi]$. בטא את α_n ו- β_n על ידי a_n ו- b_n .

4. תהי θ זווית נתונה. הוכח כי הקבוצה

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(x + \theta), \sin(x + \theta), \cos(2x + \theta), \sin(2x + \theta), \dots \right\}$$

היא מערכת אורתונורמלית במרחב E ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$