אנליזה מודרנית 1

הועלה על הלטך ע"י ניר שורץ עפ"י תרגולים של רחל גרינפלד

20 בנובמבר 2014

תוכן עניינים

הערה

אם טעיתי/תעיתי בדרך העתקת הפתרון פנה אלי: *eyenir@gmail.com*

תרגולים 1-3

רחל העלתה לאתר ברם אם יהיה צורך שלחו לי מייל עם מספר תרגול ואילו אני אמיר אותו להנאת הקהל בזמני הפנוי.

4 תרגול 4

4.1 תהליך ההרחבה

התחלנו עם $|\cdot|$ על המלבנים.$\leftarrow$ ראינו שניתן להגדיר m על קב' אלמנטריות (מידה על אלגברה).$\leftarrow$ ע"י m בנינו: מידה חיצונית m^* על $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$. $\leftarrow$קיבלנו מרחב מידה שלמה המושרה ע"י m^*. $\left(\mathbb{R}^d, S, m\right)$ מידת לבג על $\mathbb{R}^d$.

4.2 מידת סטילטיס

תהי $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מונוטונית ולא יורדת ורציפה מימין. תהי S קבוצת האינטרוואלים ב$\mathbb{R}$. נגדיר $\mu : S \to [0, \infty)$ ע"י

$$\mu\left(I\right) := \Delta F \mid_I$$

וניתן לפי תהליך ההרחבה הנ"ל נקבל שוב מרחב מידה מתאים $(\mathbb{R},S_F,\mu_F)$.

4.2.1 תרגיל

נתונה $F(x)=\begin{cases}4 & x\geq 1\\ x+1 & 0\leq x<1\\ \exp(x) & x<0\end{cases}$. יהיו $I_1=(4,\infty)\,,I_2=(1/4,1)\,,I_3=[-2,0]$.

1. חשבו את מידת סטילטיס של F על האינטרוולים הנתונים.
2. האם יש תת קבוצה לא מדידה ב:
   (א) $[1,\infty)$
   (ב) $[0,1)$
   (ג) $(-\infty,0)$

פתרון

.1

$$\begin{aligned}I_1 &= (4,\infty)\Rightarrow\mu_F(I_1)=\lim_{x\to\infty}f(x)-F(4)=4-4=0\\ I_2 &= (1/4,1)\Rightarrow\mu_F(I_2)=\lim_{x\to 1^-}f(x)-F(1/4)=1+1-(1/4+1)=3/4\\ I_3 &= [-2,0]\Rightarrow\mu_F(I_3)=F(0)-F(-2)=1-\exp(-2)=1-e^{-2}\end{aligned}$$

2. נטפל בכל מקרה לגופו:

(א) לכל $A\subseteq[1,\infty)$ ראינו ש$\mu_F([1,\infty))=0$ אז גם $\mu_F(A)=0$. כיוון שראינו שמידת סטיליטיס שלמה (לפי תהליך ההרחבה) לכן כל ת"ק של $[1,\infty)$ מדידה μ_F.

(ב) לכל $I\subseteq[0,1)$ אינטרוול פתוח/סגור/חצי פתוח/מנוון עם קצוות a,b מתקיים

$$\mu_F(I)=b+1-a-1=b-a=m(I)\quad\text{lebesgue measure}$$

לכן מידת לבג מתלכדת עם μ_F על $[0,1)$.

$$S=S_F$$

$A\subseteq[0,1)$ מדידה μ_F אמ"מ A מדידה לבג.

(ג) לכל אינטרוול $I\subseteq(-\infty,0)$ פתוח/סגור/חצי פתוח/מנוון עם קצוות a,b אזי

$$\mu_F(I)=f(b)-f(a)=e^b-e^a$$

$$m(I)=b-a$$

אבל מתקיים

$$e^a\left(b-a\right)\le e^b-e^a\le e^b\left(b-a\right)$$

ז"א $0<e^am\left(I\right)\le\mu_F\left(I\right)\le e^bm\left(I\right)$.

$$\mu_F\left(I\right)=0\Leftrightarrow m\left(I\right)=0$$

לכן מתהליך ההרחבה נקבל את אותה σ־אלגברה עבור m וμ_F לכן $S\subseteq\left(-\infty,0\right)$ מדידה μ_F אס"ם S מדידה לבג. (כיוון שניתן להתקרב לS ע"י μ_F ע"י קבוצות אלמנטריות אמ"ם ניתן להתקרב לS m ע"י קבוצות אלמנטריות).

4.3 פונקצית קנטור (a.k.a Devil's staircase)

תזכורת לקבוצת קנטור

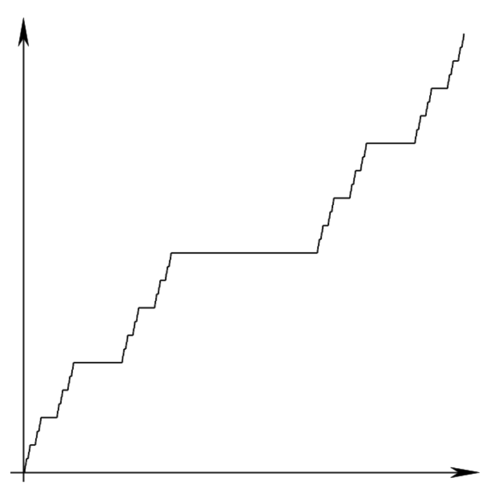
$$K=\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n$$

נגדיר אותה באופן הבא: בכל שלב נגדיר את f על הקטע שזרקנו מK_n באותו השלב. בשלב הראשון $f\left(x\right)=1/2$ $f:B_1^1\to\mathbb{R}$ היכן ש$B_1^1=\left(1/3,2/3\right)$. בשלב השני נגדיר את f על $B_2^1=\left(1/9,2/9\right)$ להיות קבועה $1/4$. על $B_2^2=\left(7/9,8/9\right)$ את f להיות קבועה $3/4$. נמשיך: בשלב הk־י 'זורקים' 2^{k-1} קטעיםזרים באורך 3^{-k} כ"א. נמספר אותם שוב בסדר עולה $\left\{B_k^m\right\}_{m=1}^{2^{k-1}}$. נגדיר את f על B_k^m להיות קבועה = $\frac{2m-1}{2^k}$ בסוף התהליך נקבל

$$f:\left[0,1\right]\backslash K\to\left[0,1\right]$$

רציפה במ"ש. הנפשה של הבנייה הזו זמינה ב
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Cantor_function.gif

שרטוט מסכם



הוכחה

יהי $\varepsilon > 0$ אזי קיים n כך ש $\varepsilon > {}^{1}\!/_{2^n}$. נקבע $\delta < \frac{1}{3^n}$ ואז לפי הבנייה והגדרתה של f:

$$\forall a, b \in [0,1] \setminus K : |b-a| < \delta \Rightarrow |f(b) - f(a)| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

מ.ש.ל.

ראינו בתרגול הקודם שלכל $t \in K$ קיימת סידרה $\{t_n\} \subset K^c$ כך ש:

$$t_n \to t$$

לכן כיוון ש־f רציפה במ"ש נוכל להרחיב את f ולהגדיר לכל $t \in K$

$$f(t) : \lim_{n\to\infty} f(t_n)$$

הוכחה

צ"ל שלכל $\varepsilon > 0$ קיימים $N < n, m$ כך ש

$$\Rightarrow |f(t_n) - f(t_m)| < \varepsilon$$

כי אז $\{f_n\}_{\mathbb{N}}$ סדרות קושי ב$\mathbb{R}\Leftrightarrow$מתכנסת.
קיים δ כך ש:

$$\forall t_1, t_2 \in [0,1] \setminus K : |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon$$

כמו כן $t \to \{t_n\}$ לכן קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n, m > N$

$$\begin{aligned} |t_n - t| &< {}^{\delta}\!/_{2} \\ |t_m - t| &< {}^{\delta}\!/_{2} \\ |t_n - t_m| &\leq |t_m - t| + |t - t_n| < {}^{\delta}\!/_{2} + {}^{\delta}\!/_{2} = \delta \end{aligned}$$

$$|f(t_n) - f(t_m)| < \varepsilon$$

כנדרש.

נקבל f רציפה מונוטונית לא יורדת על $[0,1]$ (כיוון והגבול שומר על רציפות ומונוטוניות).

$$\mu_F([0,1] \setminus K) = 0$$

f קבועה על האינטרוולים שמגדירים את $[0,1] - K$. כמו כן, אנו יודעים גם שהגבול

$$f(1) = \lim_{t\to 1} f(t) = 1$$

$$f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = 0$$

$$\left(\frac{2^n - 1}{2^n} \to 1, \frac{1}{2^n} \to 0\right)$$

אם $f(1) = 1, f(0) = 0$ אז

$$\mu_F([0,1])\, 1 - 0 = 1$$

כלומר μ_F מרוכזת על קבוצת קנטור כי היא מתאפסת על הקטעים שזרקנו (על המשלים).

4.4 פונקציות מדידות

4.4.1 הגדרה

יהי (Ω, S) מרחב מדיד. $f:\Omega\to\mathbb{R}$ נקראת מדידה אם אחד מהתנאים הבאים מתקיים לכל $\alpha\in\mathbb{R}$:

1. $\{f<\alpha\}\in S$.
2. $\{f>\alpha\}\in S$.
3. $\{f\le\alpha\}\in S$.
4. $\{f\ge\alpha\}\in S$.

(זו התמונה ההפוכה).

4.4.2 תרגיל

$S=\{\emptyset,\Omega\}$ מהן הפונקציות המדידות־S?

פתרון:

f מדידה אז לכל $\alpha\in\mathbb{R}$. $\begin{cases}\{f\le\alpha\}\in S\\ \{f\ge\alpha\}\in S\end{cases}$ $\Leftarrow$כלומר $\left\{f \lesseqqgtr \alpha\right\}\in\{\emptyset,\Omega\}$. לא יתכן שלכל α, $\{f\ge\alpha\}=\emptyset$ לכן קיים α_0 מקסימלי כך ש

$$\{f\ge\alpha_0\} \;=\; \Omega$$

אך לא יתכן שלכל α $\{f\le\alpha\}=\Omega$ לכן קיים $\alpha_1\in\mathbb{R}$ מקסימלי כך ש$\{f\le\alpha_1\}=\emptyset$. אזי התמונה של f מוכלת ב$[\alpha_0,\alpha_1]$. מהמקסימליות של α_0,α_1 נובע ש$\alpha_0=\alpha_1$ וf קבועה.

4.4.3 טענה

אם f מדידה af מדידה $(a\in\mathbb{R})$.

הוכחה

1. $a=0 \Leftarrow af\equiv 0$ קבועה. $\forall\alpha\in\mathbb{R}\,\{af<\alpha\}\in\{\emptyset,\Omega\}\subset S$.
2. $a>0$: $\forall a\in\mathbb{R}\,\{af<\alpha\}=\{f<{}^{\alpha}\!/\!_{a}\}\in S$
3. $a<0$ $\forall\alpha\in\mathbb{R},\{a<f<\alpha\}=\{f>{}^{\alpha}\!/\!_{a}\}\in S$כי f מדידה.