# דוגמה לפתרון משוואה ריבועית עם מקדמים מרוכבים

22 באוקטובר 2015

הערה 1. נזכיר את נוסחת השורשים מהתיכון: הפתרונות של המשוואה $ax^2+bx+c=0$ הם

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

הנוסחה הזו נכונה גם למשוואות מעל המרוכבים. רק שבמרוכבים צריך להתאמץ יותר כדי למצוא שורשים ☺ נדגים זאת בתרגיל הבא:

**תרגיל 2.** פתרו את המשוואה $2z^2-8z=10-20i+12iz$ מעל המרוכבים.

פתרון. קודם כל, מעבירים את כל המשוואה לאגף אחד. נחלק ב-2, ונקבל

$$\begin{gathered}z^2-4z=5-10i+6iz\\ z^2-(4+6i)\,z+(-5+10i)=0\end{gathered}$$

כעת נעזרים בנוסחת השורשים האהובה (מהערה 1), עם $a=1$, $b=-(4+6i)$ ו-$c=(-5+10i)$. מקבלים:

$$\begin{aligned}z_{1,2} &= \frac{(4+6i)\pm\sqrt{(4+6i)^2-4\cdot1\cdot(-5+10i)}}{2\cdot1}=\frac{4+6i}{2}\pm\frac{\sqrt{16+48i-36+20-40i}}{2}=\\ &= 2+3i\pm\frac{\sqrt{8i}}{2}\overset{(\star)}{=}2+3i\pm\sqrt{2i}\end{aligned}$$

כאשר

$$\frac{\sqrt{8i}}{2}=\frac{\sqrt{4\cdot2i}}{2}=\frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{2i}}{2}=\frac{2\cdot\sqrt{2i}}{2}=\sqrt{2i}$$

אבל מה זה $\sqrt{2i}$? נניח $u^2=2i$. נסמן $u=a+bi$, ונקבל את המשוואה

$$u^2=(a+bi)^2=\left(a^2-b^2\right)+2abi=2i$$

נשווה ממשי לממשי ומדומה למדומה, ונקבל

$$\begin{cases}a^2-b^2=0\\ 2ab=2\end{cases}$$

לפי המשוואה השנייה, $ab=1$. נעלה בריבוע, ונקבל $a^2b^2=1$. לפי המשוואה הראשונה, $a^2=b^2$, ולכן מקבלים $a^4=a^2\cdot a^2=1$. כלומר $a=\pm1$. אבל $ab=1$, וקיבלנו שני פתרונות:

אם $a=1$, $b=1$, והפתרון הוא $u_1=1+i$.

אם $a=-1$, $b=-1$, והפתרון הוא $u_2=-(1+i)$.

לכן השורשים של $2i$ הם $\pm(1+i)$. נחזור לנוסחה שהייתה לנו, ונקבל

$$z_{1,2}=2+3i\pm(1+i)=\begin{cases}3+4i\\ 1+2i\end{cases}$$