מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 11 - פתרון

<u>בעיה 1</u>

יהי $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 + y^2 \le 1\}$.

יהי ~ יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$ כך ש-

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$$
$$\Updownarrow$$
$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D^2 \vee (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

<u>הוכיחו</u>:

$\mathbb{R}^2/\sim$ הומאומורפי ל-$\mathbb{R}^2$.

<u>תזכורת</u> (מהלימודים הקודמים).

נזכיר שאפשר לראות את הקבוצה $\mathbb{R}^2$ כמרחב וקטורי. יתרה מזאת:

ב-$\mathbb{R}^2$ מוגדרת נורמה אוקלידית $||\cdot||$ כך

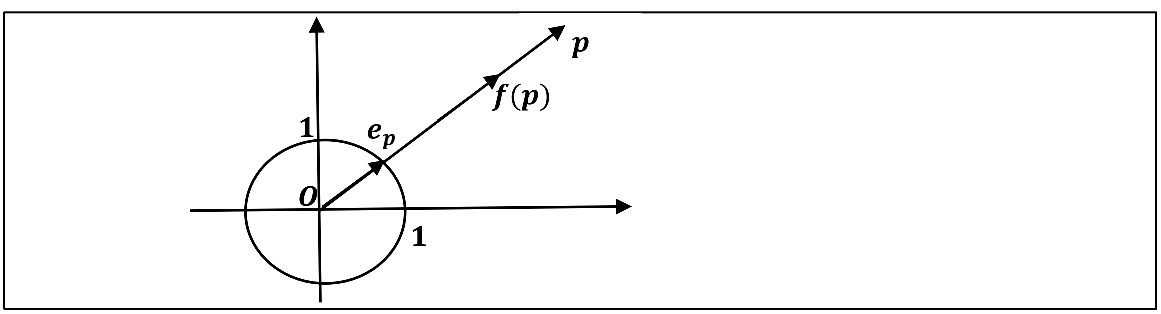
שלכל $p(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $||p|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

גיאומטרית – זה אורך של רדיוס-וקטור $\overrightarrow{Op}$.

לכל $p \neq 0$ קיימת הצגה יחידה בצורה $p = ||p||e_p$

כאשר $||e_p|| = 1$. אזי לכל $p \neq 0$: $e_p = \frac{p}{||p||}$.

גיאומטרית, הנקודות $\{te_p|t \ge 0\}$ יוצרות יחד קרן שיוצא מ-O.



אם להגדיר מרחק בין שתי נקודות p, q כ- $d(p,q) = ||p - q||$

אז $\mathbb{R}^2$ הופך למרחב מטרי.

סוף תזכורת.==================================

הוכחה

נגדיר $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ באופן הבא.

$$f(p) = \begin{cases} e_p\left(||p|| - 1\right), & ||p|| \geq 1 \\ O, & ||p|| \leq 1 \end{cases}$$

(כאן O -ראשית).

כלומר, הפונקציה שולחת כל נקודה p של הקרן e_p שמחוץ ל-D^2 לאותה הקרן אבל מקטינה את הנורמה $||p||$ ל-"1". (ראה\י את השרטוט). הנקודות השייכות ל- D^2 נשלחות לנקודון $\{O\}$.

קודם כל, f פונקצית על:

- אם $O \neq y \in \mathbb{R}^2$ אז $f\left(e_y(||y|| + 1)\right) = e_y||y|| = y$.
- אם $y = O$ אז $f(O) = O = y$.

f מכבדת את יחס השקילות:

$$p \sim q \wedge p \neq q \Rightarrow ||p|| \leq 1 \wedge ||q|| \leq 1 \Rightarrow f(p) = f(q) = O$$

f מכבדת מאוד את יחס השקילות:

$$f(p) = f(q) \Rightarrow ||f(p)|| = ||f(q)||$$

$$||f(p)|| = ||f(q)|| = 0 \Rightarrow ||p|| \leq 1 \wedge ||q|| \leq 1 \Rightarrow p \sim q$$

$$||f(p)|| = ||f(q)|| > 0 \Rightarrow e_p\left(||p|| - 1\right) = e_q\left(||q|| - 1\right) \Rightarrow$$

$$p = q \Rightarrow p \sim q$$

מזה נובע שקיימת העתקה h כך ש-$f = h \circ \rho$ ו-h חח"ע ועל.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathbb{R}^2/\sim \arrow[r, "h"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

(כאן, כרגיל: $\rho(x) = [x]$).

<u>רציפות f.</u>

מכיוון ש-$e_p = \frac{p}{||p||}$ לכל $p \neq O$ מקבלים:

$$f(p) = \begin{cases} p\left(1 - \frac{1}{\left||p|\right|}\right), \left||p|\right| \geq 1 \\ O, \qquad\qquad \left||p|\right| \leq 1 \end{cases}$$

יהי (x, y) קואורדינטה של p. אזי:

$$f\big(p(x,y)\big) = \begin{cases} \left(x\left(1 - \frac{1}{\left||p|\right|}\right), y\left(1 - \frac{1}{\left||p|\right|}\right)\right), \left||p|\right| \geq 1 \\ (0,0) \qquad\qquad\qquad\qquad , \left||p|\right| \leq 1 \end{cases}$$

נגדיר פונקציות $f_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ כך ש-

$$f_1(p(x,y)) = \begin{cases} x\left(1 - \frac{1}{\left||p|\right|}\right), \left||p|\right| \geq 1 \\ 0 \qquad\qquad , \left||p|\right| \leq 1 \end{cases}$$

$$f_2(p(x,y)) = \begin{cases} y\left(1 - \frac{1}{\left||p|\right|}\right), \left||p|\right| \geq 1 \\ 0 \qquad\qquad , \left||p|\right| \leq 1 \end{cases}$$

ראוים ש- $f = (f_1, f_2)$.

נוכיח עכשיו ש-f_1 רציפה:

- $p(x,y) \mapsto x, p(x,y) \mapsto y$ רציפות כהטלות.
- $p(x,y) \mapsto \left||p|\right| = d(p,O)$ רציפה (הוכח הרבה פעמים בעזרת סדרות במרחב מטרי. ראה, למשל, תרגיל כיתה 12).
- $f_1|_{(\mathbb{R}^2 - D^2)\cup S^1} = x\left(1 - \frac{1}{||p||}\right)$ רציפה לפי המשפטים על רציפות הרכבה, מכפלה וסכום של רציפות עם טווח $\mathbb{R}$.

- f_1 רציפה על $\mathbb{R}^2$ כי היא
שווה ל-0 על $D^2 \cap \left((\mathbb{R}^2 - D^2) \cup S^1\right) = S^1$
(בנית פונקציה רציפה על ידי פונקציות רציפות על איברי כיסוי סגור סופי(ההרצאות)).

f_2 רציפה בדיוק לפי אותה הלוגיקה.

לכן $f = (f_1, f_2)$ <u>רציפה</u> כי רכיביה רציפים (ההרצאות), מש"ל.

<u>f סגורה.</u>

תהי $F \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה סגורה. צריך להוכיח ש-$f(F)$ סגורה.

למטרה זו נשתמש בקריטריון שתקף במרחבים מטריים:

קבוצה S סגורה אם"ם לכל סדרה $y_n \in S$ כך ש- $y_n \to b$ גם $b \in S$.

נניח ש-$S = f(F)$, $y_n \in S$ ו-$y_n \to b$. צ"ל ש-$b \in S$.

==

לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $x_n \in F$ כך ש-$f(x_n) = y_n$.

הסדרה y_n חסומה כסדרה מתקנסת (ההרצאות והתרגילים).

לכן קיים $R > 0$ כך ש-$\left\|y_n\right\| < R$. אזי לגבי סדרה x_n:

אם $\left\|x_n\right\| > 1$ אז $\left\|y_n\right\| = \left\|x_n\right\| - 1 < R$ ולכן $\left\|x_n\right\| < R + 1$;

אם $\left\|x_n\right\| \leq 1$ אז גם $\left\|x_n\right\| < R + 1$ כי $R > 0$.

כלומר הסדרה x_n חסומה ובפרט לכל $n \in \mathbb{N}$: $x_n \in D(O, R+1)$,

כאשר $D(O, r) := \{x \in \mathbb{R}^2 | \left\|x\right\| \leq r\}$.

$D(O, R+1)$ קבוצה סגורה וחסומה ב-$\mathbb{R}^2$ ולכן $D(O, R+1)$ תת מרחב קומפקטי (משפט היינה-בורל). לכן לסדרה x_n קיימת תת סדרה x_{n_i} המתכנסת לנקודה a. כיוון ש-F סגורה הנקודה a שייכת ל-F .

מכיוון ש-f רציפה, $x_{n_i} \to a \Rightarrow y_{n_i} = f\left(x_{n_i}\right) \to f(a)$.

אבל $y_{n_i} \to b$ ולכן $f(a) = b$, כלומר $b \in f(F) = S$, מש"ל.

==

כך הוכחנו ש-f פונקציה <u>סגורה</u>.
ולבסוף : f העתקת על, רציפה וסגורה, לכן f <u>העתקת מנה</u>.
זה גורר ש- h העתקת מנה. אולם העתקת מנה חח"ע היא הומיאומורפיזם. כלומר h הומיאומורפיזם, מש"ל.

<u>בעיה 2</u>
יהי $a \in \mathbb{R}$. יהי $\sim$ יחס שקילות על $\mathbb{R}$ כך ש-
$$x \sim y \Leftrightarrow \big((x \geq a) \wedge (y \geq a)\big) \vee \big((x < a) \wedge (y < a)\big)$$
<u>הוכיחו:</u>
$\mathbb{R}/\sim$ אינו הוסדורף.

<u>הוכחה</u>
היחס $\sim$ משרה שתי מחלקות השקילות: $[a,\infty)$– ,$(-\infty,a)$.
נסמן אותן: $l \coloneqq (-\infty,a), r \coloneqq [a,\infty)$.
אם נסמן $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}/\sim$ (קבוצת מחלקות השקילות) נקבל: $\widehat{\mathbb{R}} = \{l,r\}$.
נסמן ב-$\rho\colon \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}}$ את העתקה ששולחת כל $x \in \mathbb{R}$ למכלקת השקילות $[x]$.
טופולוגית המנה T מכילה את הנקודון $\{l\}$ ולא מכילה את הנקודון $\{r\}$ כי $\rho^{-1}(\{l\}) = (-\infty,a)$ פתוחה ב-$\mathbb{R}$ ו-$\rho^{-1}(\{r\}) = [a,\infty)$ אינה פתוחה ב-$\mathbb{R}$. כלומר $T = \{\emptyset, \mathbb{R}, \{l\}\}$.
רואים שהנקודון <u>$\{l\}$ לא סגור</u> כי המשלים שלו $\{r\}$ לא שייך ל-T.
זה לא יכול להיות במרחב האוסדורף ולכן $(\widehat{\mathbb{R}}, T)$ איננו מרחב האוסדורף, מש"ל.

<u>בעיה 3</u>
יהי $\sim$ יחס שקילות על מ"ט X .
<u>הוכיחו</u> שכל מחלקות השקילות פתוחות אם"ם $X/\sim$ מ"ט דיסקרטי

הוכחה

תהי $\rho: X \to X/\sim$ העתקה שמוגדרת על ידי השוויון $\rho(x) = [x]$
לכל $x \in X$ כאשר $[x]$ מחלקת השקילות אליה שייך x.
הוכח בהרצאות ש-ρ העתקת מנה.
מהגדרת ρ מקבלים: $\rho^{-1}(\{[x]\}) = [x]$.
לפי הגדרת העתקת מנה הקבוצה $\{[x]\}$ פתוחה ב-$X/\sim$ אם"ם
$\rho^{-1}(\{[x]\})$ פתוחה ב-X . כלומר:
$\{[x]\}$ פתוחה ב-$X/\sim$ אם"ם $[x]$ פתוחה ב-X . (*)

כיוון 1. אם כל מחלקות השקילות פתוחות ב-X אז לפי (*) כל הנקודונים $\{[x]\}$ פתוחים ב-$X/\sim$ ולכן כל תת קבוצה במרחב הזה פתוחה כאיחוד נקודונים. ואז המרחב דיסקרטי, מש"ל.
כיוון 2. אם המרחב $X/\sim$ דיסקרטי אז כל נקודון $\{[x]\}$ פתוח ב-$X/\sim$.
אזי לפי (*) כל מחלקת השקילות $[x]$ פתוחה ב-X , מש"ל.

בעיה 4

א' נתון מ"ט דיסקרטי.
הוכיחו שהמרחב קומפקטי אם"ם הוא סופי.

הוכחה

כיוון 1. נניח שהמרחב X קומקטי. מכיוון שהוא דיסקרטי כל נקודון בו – תת קבוצה פתוחה. לכן אוסף של כל הנקודונים – כיסוי פתוח.
בזכות הקומפקטיות הכיסוי הזה מכיל תת כיסוי סופי, כלומר קיימים איברים $x_1, \dots, x_n \in X$ כך ש- $X = \{x_n\} \cup \dots \cup \{x_1\}$.
אזי X סופי, מש"ל.
כיוון 2. נניח המרחב סופי. אזי גם קבוצת תת הקבוצות שלו סופית.
לכן כל כיסוי פתוח שלו סופי ומכיל את עצמו כתת כיסוי סופי.
כלומר המרחב קומפקטי, מש"ל.

ב' נתון מ"ט סופי והאוסדורף.
הוכיחו שהמרחב דיסקרטי.

הוכחה.
יהי מ"ט $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ האוסדורף.
אם $n = 0,1$ אז המרחב האוסדורף, כי מתקיים התנאי
"כל שתי נקודות שונות אפשר להבדיל בסיבות זרות".
אם $n \geq 2$ אז לכל $2 \leq i \leq n$ קיים זוג סביבות U_i, V_i
כך ש-$x_1 \in U_i, x_i \in V_i$ ו- $U_i \cap V_i = \emptyset$.
אזי הקבוצה $U = U_2 \cap \dots \cap U_n$ פתוחה, מכילה את האיבר x_1 ולא
מכילה את האיברים $\{x_2, \dots, x_n\}$. לכן $U = \{x_1\}$. כלומר הנקודון $\{x_1\}$
פתוח. בדיוק באותה דרך מוכיחים שכל נקודון פתוח. לכן כל תת
קבוצה ב-X פתוחה והמרחב – דיסקרטית מש"ל.

בעיה 5.
תהי $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ תת קבוצה כך ש- $\mathbb{R} = \overline{A^c}$.
הוכיחו שרכיבי הקשורות של תת מרחב A הם נקודונים.

הוכחה
נניח – בשלילה – שקיימים שני מספרים $x < y \in A$ השייכים לאותו
רכיב קשירות C של A. אזי קיים מספר $b \in A^c$ כך ש- $b \in (x, y)$ כי
לפי התנאי A^c צפופה ב-$\mathbb{R}$ ולכן חותכת כל קבוצה פתחה, בפרט
חותכת את הקבוצה (x, y). כלומר $x < b < y$.
מקבלים: $x \in (-\infty, b) \cap A, y \in (b, \infty) \cap A$
ו- $A = ((-\infty, b) \cap A) \cup ((b, \infty) \cap A)$.
הקבוצות $\left((-\infty, b) \cap A\right), ((b, \infty) \cap A)$ זרות ופתוחות ב-A.

C חותכת את הקבוצה $\left((-\infty,b)\cap A\right)$ ולכן מוכלת בה כקבוצה קשירה (ההרצאות). אבל C חותכת גם את הקבוצה $A \cap (b,\infty)$.
סתירה.
כלומר C לא יכול להכיל שתי נקודות שונות. לכן C נקודון, מש"ל.

בעיה 6
א' יהי X מ"ט ויהיו $A_1,\ldots,A_n \subseteq X$ תת מרחבים קומפקטיים.
הוכיחו שגם $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ קומפקטי.

הוכחה (באינדוקציה)
בסיב האינדוקציה $n = 2$.
יהי $C = A_1 \cup A_2$ ויהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של הקבוצה C. אזי האוסף הזה הוא כיסוי פתוח גם של הקבוצה A_1 . לכן
קיימים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in I$ כך ש- $A_1 \subseteq U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}$.
האוסף הזה גם כיסוי פתוח של הקבוצה A_2 . לכן
קיימים $\beta_1,\ldots,\beta_m \in I$ כך ש- $A_2 \subseteq U_{\beta_1} \cup \ldots \cup U_{\beta_m}$.
זה גורר ש-: $C \subseteq U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n} \cup U_{\beta_1} \cup \ldots \cup U_{\beta_m}$.
כלומר, $U_{\alpha_1},\ldots,U_{\alpha_n},U_{\beta_1},\ldots,U_{\beta_m}$ תת כיסוי סופי של הקבוצה C.
אזי C קומפקטית מש"ל.
צעד האנדוקציה
נניח התענה נכונה ל$-$ $n = k$.
אזי $A_1 \cup \ldots \cup A_{k+1} = (A_1 \cup \ldots \cup A_k) \cup A_{k+1}$.
$A_1 \cup \ldots \cup A_k$ קומפקטי לפי ההנחה. לכן האיחוד באגף הימין קומפקטי לפי בסיס האינדוקציה.
כלומר, $A_1 \cup \ldots \cup A_{k+1}$ קומפקטית מש"ל.

ב' יהי X מ"ט האוסדורף . יהיו $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ תת מרחבים קומפקטיים.
הוכיחו ש- $\cap_{\alpha\in I} A_\alpha$ קומפקטי.

הוכחה

הערה. מתכוונים ש-$I \neq \emptyset$.

כל A_α סגורה ב-X כקבוצה קומפקטית מ"ט האוסדורף.
לכן $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ סגורה ב-X כחיתוך קבוצות סגורות.
אם נתבונן באיזשהו $\alpha_0 \in I$ אז נראה שהחיתוך $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ הוא
תת קבוצה סגורה של תת מרחב קומפקטי A_{α_0} (כי A_{α_0} ו-$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$
סגורות ב-X). לכן החיתוך עצמו קומפקטי, מש"ל.