בחינה בקורס **חשבון אינפיניטסימלי 1** (88-132-07) – מועד א

אוניברסיטת בר־אילן, יום ה, כב שבט תשפה (20.2.25)

מרצה: פרופ' בועז צבאן

מתרגלים: גב' אושרית שטוסל, ד"ר פאבל שטיינר

משך הבחינה: שעתיים וחצי

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו

הנחיות

1. יש לענות בגוף השאלון בלבד. מחברת הטיוטה לא תיבדק.
2. המבחן מורכב משני חלקים.

(א) בחלק הראשון (30 נקודות) שאלות שיש לסמן עבורן נכון/לא נכון, ללא נימוק. **יש לענות על כל השאלות בחלק זה.**

כדי לעבור את המבחן יש לצבור לפחות 6 תשובות נכונות בחלק זה, ולהשלים בעזרת החלק השני ל 60 נקודות או יותר.

(ב) בחלק השני (66 נקודות) שאלות שיש לענות עליהן בכתב. **יש לענות על 2 שאלות מתוך 3.** משקל כל שאלה: 33 נקודות.

(ג) עד 4 נקודות יינתנו עבור סדר, נקיון, ואלגנטיות של התשובות. השתמשו במחברת הבחינה לטיוטה, ולאחר שמצאתם פתרון, כיתבו אותו בצורה מסודרת בגוף הבחינה.

3. בשאלה עם כמה סעיפים הנקודות מתחלקות בשווה, בקירוב, בין סעיפי השאלה.
4. אם המקום המיועד לתשובה לא מספיק, אפשר להמשיך את הפתרון במקומות הבאים, לפי סדר עדיפויות יורד:

(א) גב הדף של השאלה שאתם פותרים.

(ב) שני הדפים הנוספים בסוף המבחן (בשני העמודים של כל דף).

(ג) דף של שאלה אחרת (שני צדדיו).

(ד) בטופס נוסף שתבקשו מהבוחנים, וישודך לטופס המקורי.

בכל מקרה כזה יש לציין בכל עמוד שהסתיים היכן הפתרון ממשיך.

5. אם אתם כותבים פתרון שאלה בעמוד אחר מעמוד השאלה, יש לציין בעמוד של השאלה את מיקום הפתרון.

בהצלחה!

חלק ראשון: שאלות כן/לא

לכל אחת מהטענות הבאות, סמנו האם היא נכונה או לא נכונה. אין צורך לנמק.

א. תהי A קבוצה כך שבין כל שני מספרים רציונלים יש איבר של הקבוצה A. אזי בין כל שני מספרים אירציונלים יש איבר של הקבוצה A.

נכון / לא נכון

נכון. מצפיפות הרציונלים, לכל שני מספרים ממשיים $a < b$, יש רציונלי $a < q < b$. שוב מצפיפות הרציונלים, יש רציונלי $a < p < q$. מהנתון, יש איבר של הקבוצה A בין p ל q.

ב. לכל סידרה חסומה ומתכנסת יש זנב מונוטוני.

נכון / לא נכון

לא נכון. $\frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$. אגב, כל סידרה מתכנסת היא חסומה.

ג. קיימת סידרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שקבוצת הגבולות החלקיים שלה היא $[-e^{\pi}, \pi^e]$.

נכון / לא נכון

נכון. ניקח מיספור של כל המספרים הרציונליים בקטע, $\{q_1, q_2, \dots\} = \mathbb{Q} \cap [-e^{\pi}, \pi^e]$.

לכל נקודה a בקטע, בכל סביבה שלה יש אינסוף רציונלים מהקטע, ולכן אינסוף איברים של הסידרה $(q_n)_{n=1}^{\infty}$. לכן הנקודה היא גבול חלקי של הסידרה $(q_n)_{n=1}^{\infty}$.

ד. יהי $0 < a$. אם $b \in \mathbb{R}$ $b_n \longrightarrow b$ ו $a_n \longrightarrow a$ $0 < a_n$ אז $a_n^{b_n} \longrightarrow a^b$.

נכון / לא נכון

נכון. משפט מהקורס.

ה. אם $0 < a_n$ לכל n ו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n} < \infty$ (כאשר $s_n := a_1 + \cdots + a_n$ לכל n).

נכון / לא נכון

לא נכון. ניקח $a_n := 1$ לכל n.

ו. אם טור חיובי מתכנס לפי מבחן המנה, אז הוא מתכנס גם לפי מבחן השורש.

נכון / לא נכון

נכון. משפט מהקורס.

ז. לכל טור, קיימת דרך להוסיף לו סוגריים כך שהוא מתכנס במובן הרחב.

נכון / לא נכון

נכון. תהי $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ סידרת הסכומים החלקיים. ניקח לה תת־סידרה $(s_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ שמתכנסת במובן הרחב.

הסידרה $(s_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ היא סידרת הסכומים החלקיים המתקבלת על ידי הכנסת סוגריים לטור, כאשר המקום של הסוגריים הימניים "(" הוא מימין לאיברים $a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m_3}, \dots$.

ח. עבור טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, לכל n נסמן $p_n := \begin{cases} a_n & a_n \geq 0 \\ 0 & a_n \leq 0 \end{cases}$ ו $q_n := \begin{cases} 0 & a_n \geq 0 \\ -a_n & a_n \leq 0 \end{cases}$.

$\sum a_n$ מתכנס אם ורק אם הטורים $\sum q_n$ ו $\sum p_n$ מתכנסים.

נכון / לא נכון

לא נכון. מההרצאה, כל טור מתכנס בתנאי $\sum a_n$ מקיים $\sum p_n = \sum q_n = \infty$.

ט. יהיו $-\infty \leq a, b \leq \infty$, ונתון $\lim_{x \to a} f(x) = b$. תהי V סביבה של b.

אז יש סביבה מנוקבת U של a כך שלכל x בתחום הפונקציה מתקיים: $f(x) \in V$ אם ורק אם $x \in U$.

נכון / לא נכון

לא נכון. יהיו $f(x) := 0$, $a := 1$, $V = (-2, 2)$. לכל סביבה מנוקבת U של 1 מתקיים $1 \notin U$ ולמרות זאת $f(1) = 0 \in (-2, 2)$.

י. לכל $0 < x < \frac{\pi}{2}$ מתקיים $\sin x < x < \tan x$.

נכון / לא נכון

נכון. ראינו בהרצאה ש $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$. $0 < \sin x$ בתחום הנתון, ולכן אם נכפול את כל האגפים ב $\sin x$ הכיוון של האי־שיוויונים יישמר.

חלק שני: שאלות כתיבה

ענו בצורה מלאה ומנומקת על **שתי שאלות** מבין שלושת השאלות הבאות.

שאלה 1

השאלה עוסקת במשפט הבא.

תהי $-\infty \leq a \leq \infty$. יהיו f, g גזירות בסביבה מנוקבת של a כך ש $g'(x) \neq 0$ בסביבה זו, ומתקיים:

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$$
$$g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0.$$

אם הגבול $b := \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים במובן הרחב, אז גם $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$.

המשפט תקף גם עבור סביבה חד־צדדית של a וגבולות חד־צדדיים מתאימים.

א. נסח והוכח את המקרה $x \longrightarrow 0^+$.

ב. הוכח את המקרים הבאים, לפי הסדר הבא.

1. $x \longrightarrow 0^-$.
2. $x \longrightarrow 0$.
3. $x \longrightarrow \infty$.

תשובה:

הוכח בהרצאה.

אין קשר בין סעיפי השאלה הבאה. מותר להשתמש בכל מה שנלמד בקורס.

שאלה 2

א. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סידרה, ויהי a מספר ממשי כך ש $a \notin \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

הוכח את הטענה הבאה:

a גבול חלקי של הסידרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ $\Longleftrightarrow$ כל סביבה של a מכילה איבר מהסידרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

ב. תהי f פונקציה רציפה בכל הישר הממשי, ותהי a נקודה המקיימת $f(a) < 0$. הוכח שיש סביבה של a שבה מתקיים $f(x) < 0$.

תשובה:

א. בהרצאה הוכחנו שלכל סידרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתקיים:

a גבול חלקי של הסידרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ $\Longleftrightarrow$ כל סביבה של a מכילה אינסוף איברים מהסידרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ (כלומר, מכילה את a_n לאינסוף ערכים של n).

($\Leftarrow$) מהמשפט המצוטט, בכל סביבה יש אינסוף איברים מהסידרה, ובפרט יש בה איבר מהסידרה.

($\Rightarrow$) מהמשפט המצוטט, מספיק להוכיח שבכל סביבה $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ של הנקודה a יש אינסוף איברים מהסידרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

נניח בשלילה שיש סביבה $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ שבה רק מספר סופי של איברים מהסידרה.

מהנתון, בסביבה זו יש לפחות איבר אחד של הסידרה. יהיו $a_{m_1}, a_{m_n}, \ldots, a_{m_k}$ כל אברי הסידרה שנמצאים בסביבה.

מהנתון, לכל n מתקיים $a \neq a_n$ ולכן $0 < |a_n - a|$.

יהי $\epsilon_0 := \min\left\{|a_{m_1} - a|, |a_{m_2} - a|, \ldots, |a_{m_k} - a|\right\}$.

אז $0 < \epsilon_0$ (מינימום של מספר סופי של מספרים חיוביים), וכן $\epsilon_0 < \epsilon$ (כי למשל $\epsilon_0 \leq |a_{m_1} - a| < \epsilon$).

אז בסביבה $(a-\epsilon_0, a+\epsilon_0)$ אין איברים של הסידרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:

לכל $x \in (a-\epsilon_0, a+\epsilon_0)$ מתקיים $|x-a| < \epsilon_0$, ולכן $x \neq a_{m_1}, a_{m_n}, \ldots, a_{m_k}$.

בנוסף, $\epsilon_0 < \epsilon$ ולכן אין בסביבה $(a-\epsilon_0, a+\epsilon_0)$ איברים אחרים a_n, כלומר גם לכל $n \notin \{m_1, \ldots, m_n\}$ מתקיים $x \neq a_n$.

ב. ניקח $0 < \epsilon$ כך ש $f(a) + \epsilon < 0$: כיון ש $f(a) < 0$, מתקיים $0 < -f(a)$ וכל $0 < \epsilon < -f(a)$ יתאים.

מרציפות הפונקציה בנקודה a, יש $0 < \delta$ כך שלכל $x \in (a-\delta, a+\delta)$ מתקיים $f(x) \in (f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$ ולכן $f(x) < f(a) + \epsilon < 0$.

שאלה 3

לכל אחת מהפונקציות הבאות: גזור את הפונקציה בתחום המצויין, וציין האם יש נקודות בתחום המצויין שבהן הפונקציה אינה גזירה.

א. $\sin(\log|x|)$ בתחום $x \neq 0$.

ב. x^x בתחום $0 < x$.

ג. $f(x) := \begin{cases} -x^3 & x \leq 0 \\ x^2 & 0 \leq x \end{cases}$ בתחום $\mathbb{R}$.

ד. $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\frac{2}{x^2} + 2x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ בתחום $\mathbb{R}$.

תשובה:

א. עבור $0 < x$:

$$(\sin(\log|x|))' = (\sin(\log x))' = \cos(\log x) \cdot \log'(x) = \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos(\log x)}{x} = \frac{\cos(\log|x|)}{x},$$

כאשר השיוויון הראשון והאחרון נובעים מכך ש $0 < x$, השני נובע מכלל השרשרת, והשלישי מכך ש $\log'(x) = \frac{1}{x}$.

עבור $x < 0$:

$$\begin{aligned}(\sin(\log|x|))' &= (\sin(\log(-x)))' = \cos(\log(-x)) \cdot \log'(-x) \cdot (-1) \\ &= \cos(\log(-x)) \cdot \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{\cos(\log(-x))}{x} = \frac{\cos(\log|x|)}{x},\end{aligned}$$

כאשר השיוויון הראשון והאחרון נובעים מכך ש $x < 0$, והשני נובע מכלל השרשרת (פעמיים).

לסיכום, הפונקציה גזירה בכל תחום הגדרתה ($x \neq 0$), ונגזרתה היא $\frac{\cos(\log|x|)}{x}$.

ב. חישוב הנגזרת: לכל $0 < x$:

$$(x^x)' = (e^{\log(x^x)})' = e^{\log(x^x)} \cdot (\log(x^x))' = x^x \cdot (x \log x)' = x^x \cdot (1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x \cdot (\log x + 1),$$

כאשר השיוויון הראשון נובע מכך ש $\log x$ היא הפונקציה ההפוכה ל e^x, השני נובע מכלל השרשרת, השלישי נובע מכך ש $x^x = e^{\log(x^x)}$ ובנוסף $\log(x^x) = x \log x$, והרביעי מנגזרת של מכפלה.

ג. בתחום $x < 0$ מתקיים $f(x) = -x^3$, ומשום שנגזרת בנקודה תלויה רק בערכי הפונקציה בסביבת הנקודה, מתקיים שם

$$(-x^3)' = -(x^3)' = -3x^2,$$

כאשר השיוויון הראשון נובע מלינאריות הנגזרת, והשני מנגזרת של חזקה.

בתחום $0<x$ מתקיים $f(x)=x^2$, ומשום שנגזרת בנקודה תלויה רק בערכי הפונקציה בסביבת הנקודה, מתקיים שם

$$(x^2)'=2x,$$

מנגזרת של חזקה.

בנקודה $x=0$ נחשב את הגבול המגדיר את הנגזרת, מימין ומשמאל בנפרד:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2}{t}=\lim_{t\to 0^+}t=0.$$
$$\lim_{t\to 0^-}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0^-}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0^-}\frac{-t^3}{t}=\lim_{t\to 0^+}-t^2=-0^2=0.$$

בשני החישובים, השיוויון הראשון נובע מכך ש $f(0)=0$, השני מהגדרת הפונקציה f בתחום הרלוונטי לגבול, והשלישי מצימצום. השיוויון האחרון בחישוב השני נובע מחשבון גבולות.

כיון שהגבולות מימין ומשמאל קיימים ושווים ל 0, מתקיים $f'(0):=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=0$.

לסיכום, הפונקציה גזירה בכל הישר הממשי.

ד. בתחומים $(0,\infty)$ ו $(-\infty,0)$ מתקיים $f(x)=x^2\sin\frac{2}{x^2}+2x$, ומשום שנגזרת בנקודה תלויה רק בערכי הפונקציה בסביבת הנקודה, מתקיים שם

$$\begin{aligned}f'(x)=&\left(x^2\sin\frac{2}{x^2}\right)'+(2x)'=(x^2)'\cdot\sin\frac{2}{x^2}+x^2\left(\sin\frac{2}{x^2}\right)'+2x'\\ =&2x\cdot\sin\frac{2}{x^2}+x^2\cdot\cos\frac{2}{x^2}\cdot\left(\frac{2}{x^2}\right)'+2\\ =&2x\sin\frac{2}{x^2}+x^2\cdot\cos\frac{2}{x^2}\cdot\frac{-2(2x)}{x^4}+2\\ =&2x\sin\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x}\cos\frac{2}{x^2}+2\end{aligned}$$

השיוויונים נובעים, לפי הסדר, מנגזרת של סכום, נגזרת של מכפלה וליניאריות הנגזרת, נגזרת של חזקה, כלל השרשרת, נגזרת של מנה ונגזרת של חזקה, ופישוט.

בנקודה $x=0$ נחשב את הגבול המגדיר את הנגזרת באופן ישיר:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0}t\sin\frac{2}{t^2}+2=2.$$

השיוויון הראשון נובע מכך ש $f(0)=0$, השני מכך ש $f(t)=t^2\sin\frac{2}{t^2}+2t$ עבור $t\neq 0$ וצימצום. השיוויון השלישי נובע מכך שמכפלה של פונקציה אפסה (שואפת לאפס) בפונקציה חסומה היא פונקציה אפסה, ומחשבון גבולות.

לסיכום, הפונקציה גזירה בכל הישר הממשי.

דף נוסף ראשון לפתרון שאלות (למי שהמקום בדפים הקודמים לא הספיק)

דף נוסף שני לפתרון שאלות (למי שהמקום בדפים הקודמים לא הספיק)