מבחן מועד ג׳ - 83-112 חדו"א 1 להנדסה - 2/6/2022

מרצים: דר׳ אחיה בר-און, דר׳ ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק׳ | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל 100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(6x)\left(1-\cos(\sqrt{x})\right)}{(e^x-1)(x^2+2)(x+1)x}$ ב. $\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{\ln(x^2)-2}$ ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2\cdot5^n}$

פתרון: א. נציג את הגבול כמכפלה של גבלות ידועים

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(6x)\,(1-\cos(\sqrt{x}))}{(e^x-1)\,(x^2+2)(x+1)x}=\lim_{x\to0^+}\cdot\frac{\sin(6x)}{6x}\cdot\frac{(1-\cos\sqrt{x})}{x}\cdot\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{1}{(x^2+2)\,(x^2+1)}\cdot\frac{6x}{x}$$
$$=1\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2\cdot1}\cdot6=\frac{6}{4}$$

ב.

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{\ln(x^2)-2}=\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{2\ln x-2}=\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{2\,(\ln x-1)}=\lim_{x\to e}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ג. נשתמש במבחן המנה: נגדיר $a_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2\cdot5^n}$ ואז

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\cdot\frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{5^n}{5^{n+1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\,(2n+2)}{1}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{5}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n+2}{5\,(n^2+2n+1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}}{5+\frac{10}{n}+\frac{5}{n^2}}\\&=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

ומכיוון שהגבול $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ קטן ממש מ 1 נקבל שהגבול של a_n הוא 0.

.2

(א) חשבו את $\int \frac{\ln(2x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$.

פתרון: נתחיל באינטגרציה בחלקים:

$$\int \frac{\ln(2x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} f = \ln(2x) \\ g' = \frac{1}{(x+1)^2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} f' = \frac{1}{2x}\cdot 2 \\ g = -\frac{1}{x+1} \end{array} \right\} = -\frac{\ln(2x)}{x+1} + \int \frac{1}{x\,(x+1)}\mathrm{d}x$$

בעזרת שברים חלקיים, קיימים A, B קבועים כך ש

$$\frac{1}{x\,(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

ונעשה מכנה משותף והשוואת מונים לקבל

$$1 = A\,(x+1) + Bx$$

נציב $x=0$ ונקבל $A=1$ ונציב $x=-1$ ונקבל $B=-1$. לכן

$$\int \frac{\ln(2x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = -\frac{\ln(2x)}{x+1} + \int \frac{1}{x\,(x+1)}\mathrm{d}x = -\frac{\ln(2x)}{x+1} + \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = -\frac{\ln(2x)}{x+1} + \ln|x| - \ln|x+1| + C$$

(ב) קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס או לא $\int_0^1 \frac{1}{\arctan(x)}\mathrm{d}x$.

פתרון: מתבדר: כיוון ש $\arctan(x)$ אי שלילית ב $[0,1]$ גם $\frac{1}{\arctan(x)}$ כזאת. גם $\frac{1}{x}$ אי שלילית ב $[0,1]$ ונוכל להשוות בין שתי הפונקציות:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\arctan(x)}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\arctan(x)} \underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0^+} x^2+1 = 1$$

ולכן $\int_0^1 \frac{1}{\arctan(x)}\mathrm{d}x$ ו $\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ חברים. בגלל ש $\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ (ידוע) מתבדר כך גם האינטגל שבשאלה.

3. נביט בפונקציה $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$ המוגדרת עבור $x>0$.

(א) מצאו את תחומי העליה והירידה של $f(x)$.

פתרון: כיוון ש

$$\left(\frac{1}{x}\right)^x = e^{\ln\left(\left(\frac{1}{x}\right)^x\right)} = e^{x\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$$

נקבל ש:

$$f'(x) = \left(e^{x\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\right)' = e^{x\ln\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) + x\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right)$$

ולכן $f'=0$ אמ"מ $\ln\left(\frac{1}{x}\right)-1=0$ (כי $\left(\frac{1}{x}\right)^x>0$) שזה קורה אמ"מ $\left(\frac{1}{x}\right)=e$ שזה קורה אם ורק אם $x=\frac{1}{e}$. כמו כן הסימן של f' נקבע לפי הסימן של $\ln\left(\frac{1}{x}\right)-1$ ולכן

x	0	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	e
$f'(x)$	Ud	$+$	0	$-$

כעת, מהטבלה נסיק כי f עולה ממש בקטע $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ ויורדת ממש בקטע $\left(\frac{1}{e},\infty\right)$. בנוסף, נסיק כי $x=\frac{1}{e}$ נקודת מקסימום של f.

(ב) לכל a ממשי, מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=a$.

פתרון: ראינו בסעיף קודם כי $x=\frac{1}{e}$ נקודת מקסימום של f. לכן הערך המקסימאלי הוא

$$f(\frac{1}{e})=(e)^{\frac{1}{e}}$$

כעת, הגבול באפס מימין הוא:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln\left(\left(\frac{1}{x}\right)^x\right)}=\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln\left(\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim_{x\to 0^+}x\ln\left(\frac{1}{x}\right)}=e^0=1$$

מכיוון ש

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}x=0$$

והגבול באינוסף הוא :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^x=\{0^\infty\}=0$$

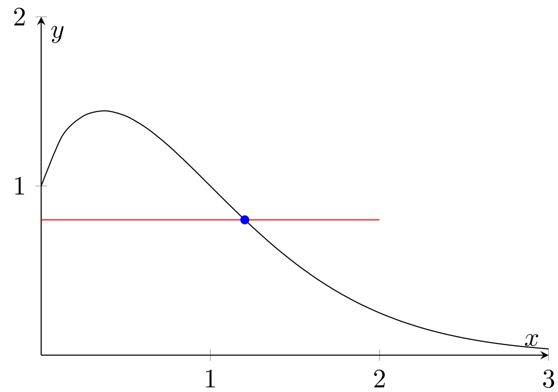
לכן:

- לכל $a>(e)^{\frac{1}{e}}$ לא יהיה פתרון ל $f(x)=a$ כי $(e)^{\frac{1}{e}}$ הערך המקסימאלי של f.
- עבור $a=(e)^{\frac{1}{e}}$ יהיה פתרון אחד ל $f(x)=a$ כיוון שזה הערך המקסימאלי של f ולכל x אחר מתקיים $f(x)<(e)^{\frac{1}{e}}$ (כי f יורדת/עולה ממש מימין/משמאל ל $\frac{1}{e}$).
- לכל $1<a<(e)^{\frac{1}{e}}$ יהיו שני פתרונות ל $f(x)=a$ מכיוון שבקטע $(0,\frac{1}{e})$ הפונקציה עולה ממש ולכן בקטע זה יכול להיות לכל היותר פתרון אחד. בנוסף, יהיה פתרון אחד מכיוון ש $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^x=1$ ולכן קיים $0<c<\frac{1}{e}$ עבורו $1<f(c)<a$ ולכן בקטע $[c,\frac{1}{e}]$ הפונקציה f רציפה ולכן לפי משפט ערך הביניים בקטע זה מתקבל הערך a. לכן יש בדיוק פתרון אחד בקטע $(0,\frac{1}{e})$. בנוסף בקרן $(\frac{1}{e},\infty)$ הפונקציה יורדת ממש ולכן לכל היותר פתרון אחד בקרן. ומכיוון ש

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^x=0$$

קיים $d<\frac{1}{e}$ כך ש $f(d)<a$ לכן בקטע $[\frac{1}{e},d]$ יש פתרון ל $f(x)=a$ (בגלל ש f רציפה שם ו $f(\frac{1}{e})>a, f(d)<a$). לכן סה"כ יהיה 2פתרונות בדיוק.
- עבור $a=1$ נקבל פתרון אחד ל $f(x)=a$ שהרי בקטע $(0,\frac{1}{e})$ לא יהיה פתרון כי הפונקציה יורדת ממש בקטע זה ו $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^x=1$. ובקרן $(\frac{1}{e},\infty)$ יהיה פתרון אחד מנימוקים דומים לבולט הקודם.
- עבור $0<a<1$ נקבל פתרון אחד ל $f(x)=a$ בקרן $(\frac{1}{e},\infty)$ בדומה לבולט קודם.
- עבור $a\le 0$ לא יהיה פתרון שהרי $\left(\frac{1}{x}\right)^x>0$ לכל x בתחום.

בציור, זה נקודות חיתוך בין הקו האדום (שמייצג $y=0.8$) לבין הקו השחור (שמייצג $y=\left(\frac{1}{x}\right)^x$)



.

4. תהא f פונקציה המוגדרת בכל $\mathbb{R}$.

(א) נתון כי f גזירה ב $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ וגם שלכל $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ מתקיים $f'(x) > 0$. הוכיחו/הפריכו: f עולה בכל $\mathbb{R}$ (כלומר לכל x_1, x_2 ממשים, אם $x_1 \leq x_2$ אז $f(x_1) \leq f(x_2)$).

פתרון: הפרכה: נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

והיא מזדהה עם הפונקציה $-\frac{1}{x}$ בתחום $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ולכן היא גזירה שמה ונגזרתה היא

$$\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$$

שחיובי לכל x ב $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. אבל הפונקציה f אינה עולה בכל $\mathbb{R}$ שהרי $-1 < 1$ אבל $f(-1) = 1 > -1 = f(1)$.

(ב) נתון כי f גזירה ב $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ומתקיים כי $\lim_{x\to 0} f'(x)$ קיים וסופי. הוכיחו/הפריכו: f גזירה בכל $\mathbb{R}$.

פתרון: הפרכה: נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

והיא מזדהה עם הפונקציה הקבועה 0 בתחום $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ולכן היא גזירה שמה ונגזרתה שמה היא 0 בפרט קיים הגבול

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

אבל f אינה גזירה בכל $\mathbb{R}$ שהרי אינה גזירה ב $x = 0$ כי היא לא רציפה שמה.

5. תהא a_n סדרה של מספרים חיוביים המקיימת כי $\left(a_{n+1}\right)^2 = a_n + \frac{n}{n+1}$ (לכל n טבעי). כמו כן נתון ש $a_1 = \frac{1}{2}$.

(א) הוכיחו כי a_n סדרה מונוטונית עולה.

פתרון: נוכיח באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים $a_{n+1} > a_n$:

- בסיס $n = 1$: נתון $a_1 = \frac{1}{2}$ וכן ש

$$\left(a_2\right)^2 = a_1 + \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

לכן $a_2 = \pm 1$ ומכיוון שזוהי סדרה של מספרים חיובים נסיק ש $a_2 = 1$ ולכן $a_2 > a_1$.

- צעד נניח נכונות עבור n, כלומר $a_{n+1} > a_n$, ונוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר $a_{n+2} > a_{n+1}$. לפ הנתון מתקיים

$$\left(a_{n+1}\right)^2 = a_n + \frac{n}{n+1} = a_n + 1 - \frac{1}{n+1}$$
$$\left(a_{n+2}\right)^2 = a_{n+1} + \frac{n+1}{n+2} = a_{n+1} + 1 - \frac{1}{n+2}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\left(a_{n+2} - a_{n+1}\right)\left(a_{n+2} + a_{n+1}\right) &= \left(a_{n+2}\right)^2 - \left(a_{n+1}\right)^2 \\ &= \left(a_{n+1} + 1 - \frac{1}{n+2}\right) - \left(a_n + 1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(a_{n+1} - a_n\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \left(a_{n+1} - a_n\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

לפי הנחת האינדוקציה $a_{n+1} - a_n > 0$ ולכן

$$\left(a_{n+2} - a_{n+1}\right)\left(a_{n+2} + a_{n+1}\right) = \left(a_{n+1} - a_n\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

אם נחלק ב $a_{n+2} + a_{n+1}$ שחיובי (כסכום של מספרים חיובים) נקבל שאי-השיוויון נשמר ונקבל

$$\left(a_{n+2} - a_{n+1}\right) > 0$$

ששקול ל $a_{n+2} > a_{n+1}$ כנדרש.

(ב) חשבו את $\lim_{n\to\infty} a_n$.

פתרון: **אם** הסדרה חסומה אז היא מתכנסת לגבול סופי L (כי היא מונטונית + חסומה). כלומר $a_n \to L$ ואז גם $a_{n+1} \to L$ ולפי הנתון נקבל

$$L^2 \leftarrow \left(a_{n+1}\right)^2 = a_n + \frac{n}{n+1} \to L + 1$$

וקיבלנו את המשוואה

$$L^2 = L + 1$$

או $L^2 - L - 1 = 0$ שהפתרונות שלה הן

$$L_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ומכיוון שמתקיים ש $a_n > 0$ אז גם $L > 0$ ולכן האופציה $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ונשארים עם $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. כעת נוכיח שאכן הסדרה חסומה ונקבל ש $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ הגבול שלה. נוכיח שהסדרה חסומה על ידי $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ באינדוקציה.

- בסיס $n=1$: נתון $a_1 = \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- צעד נניח נכונות עבור n, כלומר $a_n < L$, ונוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר $a_{n+1} < L$. לפ הנתון מתקיים

$$\left(a_{n+1}\right)^2 = a_n + \frac{n}{n+1}$$

ומכיוון שכל איברי הסדרה חיובים

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + \frac{n}{n+1}}$$

לפי הנחת האינדוקציה נקבל ש

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + \frac{n}{n+1}} < \sqrt{L+1} \underbrace{=}_{L^2=L+1} \sqrt{L^2} = |L| \underbrace{=}_{L>0} L$$

כנדרש.

.6

(א) חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{(n+k)}$$

פתרון: נציג את a_n כסכום שרימן של פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{(n+k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n\,(k+n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{k}{n}}{\frac{k+n}{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}+1}$$

וזהו אכן סכום רימן של הפונקציה הרציפה $f(x) = \frac{x}{x+1}$ בקטע $[0,1]$. לכן

$$a_n \to \int_0^1 \frac{x}{x+1} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} \mathrm{d}x = \int_0^1 1 - \frac{1}{x+1} \mathrm{d}x = \left[x - \ln|x+1|\right] \Big|_0^1 = 1 - \ln(2)$$

(ב) קרבו את $\sqrt{99}$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{10000}$.

פתרון: נשתמש בפולינום טיילור עם הפונקציה $f(x) = \sqrt{100+x}$ כאשר נפתח סביב הנקודה המצויה $a=0$ ונציב אח"כ את הנקודה הרצויה $f(-1)$. נחשב את הנגזרות הראשונות:

$$\begin{aligned} f(x) =& \sqrt{x+100} = (x+100)^{\frac{1}{2}} \\ f'(x) =& \frac{1}{2}(x+100)^{-\frac{1}{2}} \\ f''(x) =& -\frac{1}{2}\frac{1}{2}(x+100)^{-\frac{3}{2}} \\ f^{(3)}(x) =& \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(x+100)^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} f(0) =& \sqrt{0+100} = 10 \\ f'(0) =& \frac{1}{2}(0+100)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{20} \\ f''(x) =& -\frac{1}{2}\frac{1}{2}(x+100)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\left(\sqrt{100}\right)^3} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10^3} \end{aligned}$$

ושארית לגרנז' תהיה

$$\frac{f^{(3)}(c)}{3!}\left((-1)\right)^3=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(c+100\right)^{-\frac{5}{2}}\left((-1)\right)^3$$

עבור $-1<c<0$ מכיוון ש $\sqrt{x}$ היא פונקציה מונוטונית עולה אזי גם $\left(\sqrt{x}\right)^5$ ולכן $\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^5}$ מונוטונית יורדת. לכן

$$\left(c+100\right)^{-\frac{5}{2}}=\frac{1}{\left(\sqrt{c+100}\right)^5}\leq\frac{1}{\left(\sqrt{-1+100}\right)^5}\leq\frac{1}{\left(\sqrt{81}\right)^5}=\frac{1}{9^5}$$

לכן שארית לגרנז' חסומה על ידי

$$\left|f^{(3)}(c)\right|\leq\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9^5}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9^5}=\frac{1}{118098}<\frac{1}{10000}$$

ולכן פולינום טיילור מסדר 2 יתן קירוב כמבוקש בשאלה. פולינום טיילור מסדר 2 הוא

$$10+\frac{1}{20}x-\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10^3}}{2!}x^2$$

והקירוב

$$10+\frac{1}{20}\left(-1\right)-\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10^3}}{2!}\left(-1\right)^2=10-\frac{1}{20}-\frac{1}{8000}=9.949875$$