

מבחן מועד ב' – 86-147 חדו"א 1 לאודיסאה – 07/03/24 – הצעה לפתרון מאת עדי מכנס

מרצה: ד"ר ארז שיינר משך המבחן: שלוש שעות חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' ענו על כל השאלות כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) \cos(4x)}{e^{5x} - 1}$

פתרון:

נחשב לפי עקרון WIN:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) \cos(4x)}{e^{5x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin(3x)}{3x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{5x}{e^{5x} - 1}}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{\cos(4x) \cdot 3x}{5x} = \frac{3}{5}$$

כאשר הגבולות המסומנים ע"י הצבה של פונ' רציפות בגבולות ידועים.

ב. $\lim_{x \rightarrow \infty} x - e^{\sqrt{x}}$

פתרון:

נוציא איבר משמעותי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x - e^{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} \right)$$

נציב $t = \sqrt{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} t^2 \left(1 - \frac{e^t}{t} \right)$$

ומסדר גודל נקבל כי $1 - \frac{e^t}{t} \rightarrow -\infty$ ולכן סה"כ הגבול הינו:

$$= -\infty$$

ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\ln \left(n^2 + n + \frac{k}{n} \right) - \ln(n^2 + 1) \right]$

פתרון:

נחסום מלמעלה:

$$\sum_{k=1}^n \left[\ln \left(n^2 + n + \frac{k}{n} \right) - \ln(n^2 + 1) \right] \leq \sum_{k=1}^n \left[\ln \left(n^2 + n + \frac{n}{n} \right) - \ln(n^2 + 1) \right]$$

(כיוון שפונקציית הלוגריתם הטבעי עולה)

נחשב את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\ln \left(n^2 + n + \frac{n}{k} \right) - \ln(n^2 + 1) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 1} \right)}{\frac{1}{n}}$$

ונחשב לפי לופיטל:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2 + n + 1} \cdot \frac{(2n + 1)(n^2 + 1) - 2n(n^2 + n + 1)}{(n^2 + 1)^2}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 - n^2}{(n^2 + n + 1)(n^2 + 1)}}{-\frac{1}{n^2}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2 + n^4}{(n^2 + n + 1)(n^2 + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \left(-\frac{1}{n^2} + 1 \right)}{n^4 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} = 1$$

באופן דומה נחסום מלמטה:

$$\sum_{k=1}^n \left[\ln \left(n^2 + n + \frac{1}{k} \right) - \ln(n^2 + 1) \right] \leq \sum_{k=1}^n \left[\ln \left(n^2 + n + \frac{k}{n} \right) - \ln(n^2 + 1) \right]$$

(כיוון שפונקציית הלוגריתם הטבעי עולה)

נחשב את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\ln \left(n^2 + n + \frac{1}{k} \right) - \ln(n^2 + 1) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln \left(\frac{n^2 + n + \frac{1}{n}}{n^2 + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{n^2 + n + \frac{1}{n}}{n^2 + 1} \right)}{\frac{1}{n}}$$

נחשב לפי לופיטל:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2 + n + \frac{1}{n}} \cdot \frac{\left(2n + 1 - \frac{1}{n^2} \right) (n^2 + 1) - 2n \left(n^2 + n + \frac{1}{n} \right)}{(n^2 + 1)^2}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-n^2 + 2n - \frac{1}{n^2} - 2}{\left(n^2 + n + \frac{1}{n} \right) (n^2 + 1)}}{-\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 2n^3 + 1 + n^2}{\left(n^2 + n + \frac{1}{n} \right) (n^2 + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2} \right)}{n^4 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \right) \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} = 1$$

ובסה"כ לפי סנדוויץ':

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\ln \left(n^2 + n + \frac{n}{k} \right) - \ln(n^2 + 1) \right] = 1$$

2.

א. חשבו את $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

פתרון:

נציב:

$$\begin{cases} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \end{cases}$$

וכעת:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int 2e^t dt = 2e^t + C = e^{\sqrt{x}} + C$$

ב. חשבו את $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}} dx$.

פתרון:

$$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x}(x+1)} dx$$

נציב:

$$\begin{cases} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \end{cases}$$

ולכן:

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x}(x+1)} dx = 2 \int \frac{t^4+1}{t^2+1} dt$$

נחלק פולינומים:

$$\begin{array}{r} \frac{t^2-1}{t^4+1} \quad \frac{2}{t^2+1} \\ - \\ \frac{t^4+t^2}{-t^2+1} \\ - \\ \frac{-t^2-1}{2} \end{array}$$

ונקבל:

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{t^4+1}{t^2+1} dt &= 2 \left(\int (t^2-1) dt + \int \frac{2}{t^2+1} dt \right) = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t + 2 \arctan(t) \right) + C \\ &= 2 \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - \sqrt{x} + 2 \arctan(\sqrt{x}) \right) + C \end{aligned}$$

3. יהי $k \in \mathbb{Z}$ מספר שלם ונביט בפונקציה $f(x) = x + \sin(x)$.
א. מצאו את הערך המקסימלי והמינימלי של הפונקציה $f(x)$ בקטע $[\pi k, \pi(k+1)]$.

פתרון:

f גזירה בכל הממשיים ובפרט בקטע הנתון. נגזור את f :

$$f'(x) = 1 + \cos(x) \geq 0$$

ולכן f עולה בכל $\mathbb{R}$, ובפרט בקטע הנתון. מכאן שהמינימום והמקסימום נמצאים בקצוות:

$$\min_{[\pi k, \pi(k+1)]} f(x) = \pi k + \sin(\pi k) = \pi k$$

$$\max_{[\pi k, \pi(k+1)]} f(x) = \pi(k+1) + \sin(\pi(k+1)) = \pi(k+1)$$

ב. האם קיימות זוג נקודות ממשיות $x_1 \neq x_2$ עבורן $x_1 - x_2 = \sin(x_2) - \sin(x_1)$?

פתרון:

נעביר אגף ונבנה פונקציה:

$$h(x) = x + \sin(x) - a - \sin(a)$$

עבור a פרמטר, נמצא את כל השורשים של h .

תחילה, נשים לב כי h גזירה ורציפה בכל הממשיים, כצירוף גזירות.

כעת נגזור את h :

$$h'(x) = 1 + \cos(x) \geq 0$$

ולכן h עולה, ולכל היותר יש לה שורש אחד.

אבל! עבור a מקבלים כי $h(a) = 0$, ולכן זהו השורש היחיד שלה, משמע שלא קיימות זוג נק' כנדרש.

4. תהי $f(x)$ המקיימת $f(0) = 0$.

א. הוכיחו/הפריכו: אם הפונקציה $h(x) = \sqrt{f(x)}$ גזירה ב-0 אזי $h'(0) = 0$.

פתרון: הוכחה

נשים לב כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי:

$$\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{f(0)} = 0$$

שכן שורש הוא אי-שלילי. מכאן ש $x = 0$ מינימום של h , ומכיוון ש h גזירה בנק' זו, לפי משפט פרמה הנגזרת של הפונקציה מתאפסת בנקודה זו.

■ משל

ב. הוכיחו/הפריכו: אם הפונקציה $h(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ גזירה ב-0 אזי $h'(0) = 0$.

פתרון: הפרכה

נביט בפונקציה: $f(x) = \sin^3(x)$. אכן, $f(0) = 0$. כמו כן, $h(x) = \sin(x)$ והיא אכן גזירה ב-0, אך:

$$h'(0) = \cos(0) = 1$$

5. תהי סדרה a_n המקיימת לכל n כי $a_{n+1} = a_n + \sin(a_n)$.
א. הוכיחו כי הסדרה חסומה.

פתרון:

נסמן: $k = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid \pi k \leq a_1\}$ (במילים, העיגול השלם ל- π).

הערה: הגדרה זו היא "מוגדרת היטב", שאלמלא כן הקבוצה $\{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ הייתה חסומה מלרע, דבר שאינו נכון.

כעת, נוכיח באינדוקציה כי לכל n :

$$a_n \in [\pi k, \pi(k+1)]$$

ומכאן נוכיח שהיא חסומה.

בסיס: אכן, עבור a_1 אכן מתקיים הדבר, לפי הגדרה (מכיוון ש k הוא המקסימום שקטן ממנו, משמע ש $k+1$ גדול ממנו).

צעד: יהי n עבורו $a_n \in [\pi k, \pi(k+1)]$. צ"ל כי $a_{n+1} \in [\pi k, \pi(k+1)]$. לפי נוסחת הנסיגה מתקיים כי:

$$a_{n+1} = a_n + \sin(a_n)$$

אבל לפי הנחת האינדוקציה, מכיוון ש $a_n \in [\pi k, \pi(k+1)]$, מתרגיל 3.א. לעיל נקבל כי:

$$\pi k \leq a_{n+1} \leq \pi(k+1)$$

שכן אלה המינימום והמקסימום בקטע. ■ משל.

ב. לכל ערך של $a_1 \in [-\pi, \pi]$ קבעו והוכיחו מה יהיה גבול הסדרה a_n .

פתרון:

נחלק למקרים. אם $a_1 = 0$, אזי לכל n מתקיים כי $a_n = 0$ וברור כי היא מתכנסת ל 0.

אם $0 < a_1 \leq \pi$, הסדרה מונוטונית עולה. כיוון שלכל n מתקיים כי:

$$a_{n+1} - a_n = \sin(a_n) + a_n - a_n = \sin(a_n) \geq 0$$

וזו נכון עקב תחום העלייה שלה ב $[0, \pi]$, שכן היא חסומה שם, כפי שהוכחנו קודם לכן. כעת, מכיוון שהיא חסומה, אזי היא מתכנסת לגבול סופי, אשר נסמנו L .

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה:

$$L = L + \sin(L)$$

$$\sin(L) = 0$$

$$L = \pi k$$

אבל מכיוון ש $a_1 > 0$ וכן $a_n \leq \pi$ לכל n (לפי מה שהוכחנו בסעיף קודם) אזי $L = \pi$.

כעת, עבור $-\pi \leq a_1 < 0$, הסדרה מונוטונית יורדת, שכן לכל n מתקיים כי:

$$a_{n+1} - a_n = \sin(a_n) + a_n - a_n = \sin(a_n) \leq 0$$

ההסבר לכך נכון כפי שצינתי לפני כן.

באותו אופן, ניתן להגיע למסקנה כי

$$L = \pi k$$

ועקב האילוצים (כפי שצויין במקרים האחרים) נקבל כי $L = -\pi$.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה:

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k e^{\frac{k}{n}}}{n^2}$$

פתרון:

נשים לב כי:

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k e^{\frac{k}{n}}}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n} e^{\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

כאשר $f(x) = x e^x$. לכן לפי משפט סכומי רימן מההרצאה:

$$a_n \rightarrow \int_0^1 x e^x dx \quad \begin{matrix} f'=e^x \\ f=e^x \\ g=x \rightarrow g'=1 \end{matrix} \left[x e^x - \int e^x dx \right]_0^1 = [x e^x - e^x]_0^1 = 0 - (-1) = 1$$

ב. קרבו את $\frac{e^2+1}{e}$ עד כדי שגיאה של $\frac{1}{100}$. $h =$

פתרון:

תחילה, נשים לב כי $\frac{e^2+1}{e} = e + \frac{1}{e} = e^1 + e^{-1}$.

נחשב את פולינום טיילור של הפונקציה $f(x) = e^x + e^{-x}$, סביב הנקודה $a = 0$, ובנקודה הרצויה, $x = 1$.

ננחש סדר 5:

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

$$f'(x) = e^x - e^{-x}$$

$$f''(x) = e^x + e^{-x}$$

$$f^{(3)}(x) = e^x - e^{-x}$$

$$f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x}$$

$$f^{(5)}(x) = e^x - e^{-x}$$

$$f^{(6)}(x) = e^x + e^{-x}$$

(קל לראות כי לכל n , מתקיים כי $(f^{(n)}) = e^x + (-1)^n e^{-x}$)

כעת לפי שארית טיילור בצורת לגראנז', קיימת נקודה $0 < c < 1$ כך ש:

$$|R_6(f, a)(x)| = \left| \frac{(e^c + e^{-c})(1-0)^6}{6!} \right| = \frac{e^c + e^{-c}}{6!} \leq \frac{e + \frac{1}{e}}{6!} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{3 + \frac{1}{2}}{6!} = \frac{3.5}{720} = \frac{7}{1440} < \frac{1}{100}$$

(*) ידוע כי $2 < e < 3$, ולכן אם נציב 3 במונה נגדיל את הביטוי, וכן אם נציב 2 במכנה שם, נגדיל את המונה – וביחד נגדיל את הביטוי.

סה"כ עבור סדר 5, אכן נקבל הנדרש.

נחשב את הפולינום:

$$P_5(f, 0)(x) = 2 + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{4!}x^4$$

(שימו לב שלכל חזקה אי זוגית הנגזרת מתאפסת, עקב המינוס).

נציב 1 ונקבל:

$$e + \frac{1}{e} \approx 2 + 1 + \frac{1}{12} = 3.0833333 \dots$$