

צוות הקורס: ארז שיינר, שירה ידעי משך המבחן: שלוש שעות חומר עזר: מחשבון בלבד

הוראות: יש לענות על כל השאלות, על גבי מופס המבחן במקום המתאים, מחברת המיטא לא תסרק ולא תבדק.

1. (32 נק') תהיינה קבוצות A, B, C , הוכיחו או הפריכו כל אחד מן הסעיפים הבאים:

א. $A \setminus (B \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$

ב. $A \setminus (B \setminus C) \supseteq A \setminus (B \cup C)$

ג. $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A)$

ד. $\mathcal{P}(A \setminus B) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$

2. (21 נק') נביט ביחס R על קבוצת הממשיים $\mathbb{R}$ המוגדר על ידי הכלל

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: aRb \leftrightarrow (|a| = |b|)$$

במילים: a מתייחס ל- b אם הערכים המוחלטים שלהם שווים.

א. הוכיחו כי R יחס שקילות.

ב. לכל ערך $x \in \mathbb{R}$ קבעו והוכיחו אם עוצמת מחלקת השקילות $|[x]_R|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$ או $2^{\aleph}$. אם היא סופית, מצאו אותה.

ג. קבעו והוכיחו אם עוצמת קבוצת המנה $|\mathbb{R}/R|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$ או $2^{\aleph}$. אם היא סופית, מצאו אותה.

3. (21 נק') נביט ביחס S על קבוצת הטבעיים $\mathbb{N}$ המוגדר על ידי הכלל $\forall a, b \in \mathbb{N}: aSb \leftrightarrow ((b = a) \vee b - a > 1)$

הערה: $0 \in \mathbb{N}$.

א. הוכיחו כי S יחס סדר חלקי.

ב. מצאו את קבוצת כל האיברים המינימליים לפי היחס S ב- $\mathbb{N}$.

ג. האם קיים חסם עליון $\sup\{0, 1, 2, 3\}$? אם כן מצאו אותו, אחרת הוכיחו שלא קיים.

4. (18 נק') תהי קבוצה A ותהיינה פונקציות $f, g \in A^A$.

א. הוכיחו או הפריכו: אם $f \circ g = g \circ f$, אזי הפיכה.

ב. הוכיחו או הפריכו: אם f הפיכה, אזי $f \circ g = g \circ f$.

5. (18 נק') קבעו והוכיחו עבור כל אחת מהקבוצות הבאות אם היא מעוצמה סופית, $\aleph_0$, $\aleph$ או $2^{\aleph}$. אם הקבוצה מעוצמה סופית, מצאו את

העוצמה.

א. $A = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \text{Im}(f) = \{0, 1\}\}$

ב. $B = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists a \in \mathbb{R}: \text{Im}(f) = \{a\}\}$

את הפתרונות יש לכתוב במקומות המתאימים בדפים הבאים (אפשר לכתוב משני צידי הדף).

1. (32 נק') תהיינה קבוצות A, B, C , הוכיחו או הפריכו כל אחד מן הסעיפים הבאים:

א. $A \setminus (B \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$

ב. $A \setminus (B \setminus C) \supseteq A \setminus (B \cup C)$

ג. $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A)$

ד. $\mathcal{P}(A \setminus B) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$

פתרון:

2. (21 נק') נביט ביחס R על קבוצת הממשיים $\mathbb{R}$ המוגדר על ידי הכלל

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: aRb \leftrightarrow (|a| = |b|)$$

במילים: a מתייחס ל b אם הערכים המוחלטים שלהם שווים.

א. הוכיחו כי R יחס שקילות.

ב. לכל $x \in \mathbb{R}$ קבעו והוכיחו אם עוצמת מחלקת השקילות $|[x]_R|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$ או $2^{\aleph}$. אם היא סופית, מצאו אותה.

ג. קבעו והוכיחו אם עוצמת קבוצת המנה $|\mathbb{R}/R|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$ או $2^{\aleph}$. אם היא סופית, מצאו אותה.

פתרון:

3. (21 נק') נביט ביחס S על קבוצת הטבעיים $\mathbb{N}$ המוגדר על ידי הכלל $\forall a, b \in \mathbb{N}: aSb \leftrightarrow ((b = a) \vee b - a > 1)$

הערה: $0 \in \mathbb{N}$.

א. הוכיחו כי S יחס סדר חלקי.

ב. מצאו את קבוצת כל האיברים המינימליים לפי היחס S ב $\mathbb{N}$.

ג. האם קיים חסם עליון $\sup\{0,1,2,3\}$? אם כן מצאו אותו, אחרת הוכיחו שלא קיים.

פתרון:

4. (18 נק') תהי קבוצה A ותהיינה פונקציות $f, g \in A^A$.

א. הוכיחו או הפריכו: אם $f \circ g = g \circ f$, אזי f הפיכה.

ב. הוכיחו או הפריכו: אם f הפיכה, אזי $f \circ g = g \circ f$.

פתרון:

5. (18 נק') קבעו והוכיחו עבור כל אחת מהקבוצות הבאות אם היא מעוצמה סופית, $\aleph_0$, א או $2^{\aleph}$. אם הקבוצה מעוצמה

סופית, מצאו את העוצמה.

א. $A = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \text{Im}(f) = \{0,1\}\}$

ב. $B = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists a \in \mathbb{R}: \text{Im}(f) = \{a\}\}$

פתרון:

דף נוסף לפתרון שאלה מספר _____:

דף נוסף לפתרון שאלה מספר _____: