מטריצה מייצגת לה"ל

31 במרץ 2016

הגדרה: תהא $T : V \to W$ ה"ל. $E = \{v_1, \dots v_n\}$ בסיס ל V. $F = \{w_1, \dots w_m\}$ בסיס ל W. אזי המטריצה המייצגת של T לפי הבסיסים E, F הינה

$$[T]_F^E = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(v_1)]_F & [T(v_2)]_F & \cdots & [T(v_n)]_F \\ | & | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{m\times n}$$

1. דוגמא: $V = \mathbb{R}_3[x],\ W = \mathbb{R}^2$. נגדיר $T : V \to W$ ה"ל באופן הבא $T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} b+c \\ a \end{pmatrix}$. מצא את המטריצה המייצגת במקרים הבאים

(א) בסיסים סטדנ' $S = \{1, x, x^2, x^3\}, S' = \{e_1, e_2\}$: נחשב

$$T(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T(x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T(x^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$[T]_{S'}^S = \left(\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{S'}, \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{S'}, \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{S'}, \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שימו לב שהשיוון האחרון הוא בגלל שעבדנו עם הבסיס הסטדנטרי S'.

(ב) הבסיסים $F = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}, E = \{-1, 2+x, 3+x+x^2, x^3\}$: נחשב

$$T(-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(-1)]_F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$T(2+x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(2+x)]_F = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$T(3+x+x^2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(3+x+x^2)]_F = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$T(x^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(x^3)]_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$[T]_F^E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

משפט: תהא $T:V\to W$ ה"ל. $E=\{v_1,\dots v_n\}$ בסיס ל V. $F=\{w_1,\dots w_m\}$ בסיס ל W.
אזי לכל $v\in V$ מתקיים $[T(v)]_F=[T]_F^E[v]_E$
(כלומר להפעיל את T על וקטור שקול להפעיל מטריצה)

המחשה בעזרת הדוגמא הקודמת: $v=3+x^2$ אזי $[v]_S=\begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ ואז

$$[Tv]_{S'}=[T]_{S'}^{S}\,[v]_S=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

ולכן $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=Tv=1\cdot e_1+3\cdot e_2$.

בדרך נוספת $[v]_E=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$ ואז

$$[Tv]_F=[T]_F^E\,[v]_E=\begin{pmatrix}1&-1&-1&0\\-1&2&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$$

ולכן $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=Tv=-2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

2. דוגמא $W=\mathbb{R}^2,U=\mathbb{R}^{2\times 2}$ וה"ל $S:W\to U$ המוגדרת $S\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&a\\0&b\end{pmatrix}$. יהיו F בסיס ל W ממקודם ויהיה
$H=\left\{\begin{pmatrix}1&\\&\end{pmatrix},\begin{pmatrix}&1\\&\end{pmatrix},\begin{pmatrix}&\\1&\end{pmatrix},\begin{pmatrix}&\\1&1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל U. מצא $[S]_H^F$

פתרון: $S(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\Leftarrow[S(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})]_H=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

$S(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\Leftarrow[S(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})]_H=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$

ולכן

$$[S]_H^F=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\\0&-1\\0&1\end{pmatrix}$$

ממשפט: יהיו

$$\begin{array}{ccc} V \xrightarrow{T} & W & \xrightarrow{S} U \\ E & F & H \end{array}$$

אזי

$$[S\circ T]_H^E=[S]_H^F\,[T]_F^E$$

למשל: $S\circ T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}^{2\times2}$ המגודרת.

$$(S\circ T)=S\left(T(a+bx+cx^2)\right)=S\left(\left(\begin{array}{c} b+c \\ a \end{array}\right)\right)=\left(\begin{array}{cc} b+c+a & b+c \\ 0 & a \end{array}\right)$$

מתקיים כי

$$[S\circ T]_H^E=[S]_H^F\,[T]_F^E=\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc} -1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

משפט: ה"ל הפיכה $\Longleftrightarrow$ המטריצה המייצגת שלה (בכל שני בסיסים) הפיכה.
למשל $S\circ T$ אינה הפיכה.